关于一些 Smarandache 问题的研究 Vol. 7

刘华宁 高静 著

The Educational Publisher 2011

关于一些 Smarandache 问题的研究 Vol. 7

刘华宁

西北大学数学系

高静

西安交通大学理学院

The Educational Publisher

2011

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

The Educational Publisher Inc.
1313 Chesapeake Ave.
Columbus, Ohio 43212
USA
Toll Free: 1-866-880-5373
E-mail: info@edupublisher.com

Peer Reviewers:
Wenpeng Zhang, Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, Shannxi, P. R. China.
Wenguang Zhai, Department of Mathematics, Shangdong Teachers' University, Jinan, Shandong, P. R. China.
Guodong Liu, Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou,Guangdong, P. R. China.

Many books can be downloaded from the following **Digital Library of Science**:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

ISBN: 9781599731605
Standard Address Number : 297-5092
Printed in the United States of America

目　录

前言

著名数学家希尔伯特曾感言:“只要一门科学分支能提出大量的问题, 它就充满生命力; 而问题的缺乏则预示着独立发展的衰亡和终止.”

美籍罗马尼亚数论学家F. Smarandache 在《Only problems, not solutions》一书以及其它场合中, 提出了很多有待解决的数学问题. 许多学者对其进行了研究, 得到了不少具有重要价值的成果.

F. Smarandache 提出的大部分问题都是关于特殊数列、数论函数的. 数列、函数的取值通常是不规则的, 但是其均值却往往具有良好的性质. 很多论文利用解析数论中的方法和工具, 例如Euler 乘积公式、Perron 公式、Riemann zeta 函数的性质, 研究了F. Smarandache 提出的数列、函数的均值, 并给出了一系列的渐近公式.

本书根据导师张文鹏教授的建议, 对目前利用解析方法研究Smarandache 问题的相关工作进行了系统的总结, 其中也汇总了作者及其所在的项目组的研究成果. 本书分为五章, 分别介绍解析数论的基础知识、Smarandache 数列的均值、一些Smarandache 函数的无穷级数、除数函数与一些Smarandache 函数的混合均值、函数$e_p(n)$ 的均值. 有兴趣的读者通过阅读本书, 可以开拓读者的视野, 激发读者对这些领域的研究兴趣.

本书的完成首先感谢导师张文鹏教授的大力支持以及提出的宝贵意见. 本书的写作过程中, 得到了国家自然科学基金(编号: 10901128)、高等学校博士学科点专项科研基金–新教师类(编号: 20090201120061)、陕西省教委专项科研基金(编号: 09JK762) 以及中央高校基本科研业务费的部分资助, 作者在此表示感谢。

作者

2011 年7 月

第一章　解析数论基础

本章介绍解析数论中的一些基本概念和性质, 例如Riemann zeta 函数、Euler 乘积、Perron 公式等等。

§1.1　Riemann zeta 函数

定义1.1.1. $\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)$ *称为Euler 常数.*

在数值上$\gamma = 0.5772157\cdots$.

定义1.1.2. Γ *函数定义为*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}.$$

显然$\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ 是整函数. 此外$\Gamma(s)$ 在整个s 平面上除去点$s=0,-1,-2,\cdots$ 外是解析的, 这些点是$\Gamma(s)$ 的简单极点.

定义1.1.3. *当Re $s=\sigma>1$ 时, Riemann zeta 函数$\zeta(s)$ 的定义为*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

根据定义, $\zeta(s)$ 在半平面Re $s>1$ 是解析的.

定理1.1.1.

$$\zeta(s) = \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \textit{Re } s>1.$$

上式称为Euler 公式或Euler 恒等式.

定理1.1.2. *当Re $s>0$, $N\geq 1$ 时, 有*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{1}{2}N^{-s}+s\int_{N}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\{u\}}{u^{s+1}}du.$$

由定理1.1.2, $\zeta(s)$ 可开拓到半平面$\mathrm{Re}\, s>0$. 此外显然$\zeta(s)$ 在半平面$\mathrm{Re}\, s>0$ 除去点$s=1$ 外是解析的, 并在点$s=1$ 有一个一阶极点, 其留数为1.

定理1.1.3. 等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

成立.

上式称为ζ 函数的函数方程. 由函数方程, $\zeta(s)$ 可开拓到整个复平面, 其中$s=-2,-4,\cdots,-2n,\cdots$ 是ζ 函数的显然零点. 此外ζ 函数在带形$0\le \mathrm{Re}s\le 1$ 上有无穷多个非显然零点.

下面列出关于$\zeta(s)$ 的非显然零点的一些结论.

定理1.1.4. 设$\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$, $n=1,2,\cdots$, 是$\zeta(s)$ 的非显然零点. 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\le c\log(|T|+2).$$

定理1.1.5. 存在绝对常数$c>0$, 使得在s 平面的区域

$$Re\ s=\sigma>1-\frac{c}{\log(|t|+2)}$$

内没有ζ 函数的零点.

定理1.1.6.

$$\zeta(\sigma+it)\ll |t|^{(1-\sigma)/2}\log|t|,\quad 0\le\sigma\le 1,\quad |t|\ge 2.$$

§1.2 Euler 乘积

定义1.2.1. 一个数论函数f 称为是可乘的, 如果f 不恒为零并且对任意的$(m,n)=1$, 有$f(mn)=f(m)f(n)$.

一个数论函数称为是完全可乘的, 如果对所有的m,n, 都有$f(mn)=f(m)f(n)$.

例1.2.1. 令$f_\alpha(n)=n^\alpha$, 其中α 是固定的复数. 则$f_\alpha(n)$ 是完全可乘的.

例1.2.2. *Möbius* 函数$\mu(n)$ 是可乘的.

例1.2.3. *Euler* 函数$\phi(n)$ 是可乘的.

例1.2.4. *Liouville* 函数$\lambda(n)$ 是完全可乘的.

例1.2.5. 除数函数$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n} d^\alpha$ 是可乘的.

例1.2.6. *Dirichlet* 特征$\chi(n)$ 是完全可乘的.

定理1.2.1. 令f 是一个可乘的数论函数, 使得$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 绝对收敛. 那么, 这个级数的和能表示为在所有素数上展开的一个绝对收敛的无穷乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_p \left(1+f(p)+f(p^2)+\cdots\right).$$

如果f 是完全可乘的, 则乘积可简化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_p \frac{1}{1-f(p)}.$$

上面的乘积称为级数的Euler 乘积.

定理1.2.2. 假设$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ 对$\sigma>\sigma_\alpha$ 绝对收敛, 且f 是可乘函数, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}=\prod_p \left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right), \quad 当\sigma>\sigma_\alpha 时.$$

如果f 是完全可乘的, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}=\prod_p \frac{1}{1+f(p)p^{-s}}, \quad 当\sigma>\sigma_\alpha 时.$$

例1.2.7.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}, \quad 当\sigma>1,$$

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right), \quad 当\sigma>1,$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}, \quad 当\sigma>2,$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1+p^{-s}}, \quad 当\sigma>1,$$

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}, \quad 当\sigma>1.$$

§1.3 Perron 公式

下面的Perron 公式给出了函数$\Phi(x)=\sum\limits_{n\le x}a_n$ 与级数$f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ 之间的某种关系.

定理1.3.1. 设$f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ 当$\sigma>1$ 时绝对收敛, $|a_n|\le A(n)$, 其中$A(n)>0$ 是n 的单调增函数, 且当$\sigma\to1^+$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}=O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right),\quad \alpha>0.$$

那么对于任意的$b_0\ge b>1$, $T\ge1$, $x=N+\frac{1}{2}$, 有公式

$$\Phi(x)=\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right)+O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),$$

其中大O 常数仅依赖于b_0.

第二章　Smarandache 数列的均值分布

本章利用解析方法, 包括Euler 乘积公式与Perron 公式, 研究一些Smarandache 数列的均值分布性质, 并给出一些渐近公式.

§2.1　无3 次因子数列

一个自然数a, 如果不能被任意≥ 2 的整数b 的3 次方整除, 就称为无3 次因子数. 从不包含0 和1 的自然数集合中,

–去掉2^3 的所有倍数,

–去掉3^3 的所有倍数,

–去掉5^3 的所有倍数,

......

这样一直下去, 去掉全体素数的3 次方的所有倍数, 这样就可得到无3 次因子数列为: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, \cdots$.

F. Smarandache 建议研究无3 次因子数列的性质. 本节将利用解析方法研究该数列的渐近性质.

定理2.1.1. *令A 表示无3 次因子数列的集合. 则有*

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\leq x}} a = \frac{x^2}{2\zeta(3)} + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中ε 是任意正实数, $\zeta(s)$ 为Riemann zeta 函数.

定理2.1.2. *令A 表示无3 次因子数列的集合, $\phi(n)$ 为Euler 函数. 则有渐近公式*

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\leq x}} \phi(a) = \frac{x^2}{2\zeta(3)} \prod_p \left(1 - \frac{p+1}{p^3+p^2+1}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

定理2.1.3. *令A 表示无3 次因子数列的集合, $d(n)$ 为Dirichlet 除数函数. 则有渐近公式*

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\leq x}} d(a) \quad = \quad \frac{36x}{\pi^4} \prod_p \frac{p^2+2p+3}{(1+p)^2} \left(\ln x + (2\gamma - 1) - \frac{24\zeta'(2)}{\pi^2}\right.$$

$$-4\sum_p \frac{p\ln p}{(p^2+2p+3)(1+p)}\Bigg) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中

$$\zeta'(2) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

现在证明这些定理. 为方便起见, 定义函数$a(n)$ 如下:

$$a(n) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n=1, \\ n, & \text{如果 } k^3 \nmid n, n>1, k\geq 2, \\ 0, & \text{如果 } k^3 \mid n, n>1, k\geq 2. \end{cases}$$

显然

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\leq x}} a = \sum_{n\leq x} a(n).$$

设

$$f(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{s-1}} + \frac{1}{p^{2(s-1)}}\right) \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(3(s-1))}. \end{aligned}$$

在Perron 公式中取

$$s_0 = 0,\ b=3,\ T = x^{\frac{3}{2}},\ H(x) = x,\ B(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 2},$$

可得

$$\sum_{n\leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{3-iT}^{3+iT} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(3(s-1))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(3(s-1))}\frac{x^s}{s}$$

在$s=2$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{x^2}{2\zeta(3)}.$$

从而

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\le x}} a=\sum_{n\le x}a(n)=\frac{x^2}{2\zeta(3)}+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

这就证明了定理2.1.1.

设

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(a(n))}{n^s}, \\ f_2(s) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(a(n))}{n^s}. \end{aligned}$$

由Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\phi(a(p))}{p^s}+\frac{\phi(a(p^2))}{p^{2s}}\right) \\ &= \prod_p\left(1+\frac{p-1}{p^s}+\frac{p^2-p}{p^{2s}}\right) \\ &= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}-\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{2s-1}}\right) \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(3(s-1))}\prod_p\left(1-\frac{p^{s-1}+1}{p^{2s-1}+p^s+p}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(s) &= \prod_p\left(1+\frac{d(a(p))}{p^s}+\frac{d(a(p^2))}{p^{2s}}\right) \\ &= \prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{3}{p^{2s}}\right) \\ &= \prod_p\left(\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^2+\frac{2}{p^{2s}}\right) \\ &= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^2\left(1+\frac{\frac{2}{p^{2s}}}{\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^2}\right) \\ &= \frac{\zeta^2(s)}{\zeta^2(2s)}\prod_p\left(1+\frac{2}{(p^s+1)^2}\right). \end{aligned}$$

利用同样的方法可得

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\le x}}\phi(a)=\frac{x^2}{2\zeta(3)}\prod_p\left(1-\frac{p+1}{p^3+p^2+1}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

以及

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\leq x}} d(a) = \frac{36x}{\pi^4}\prod_p \frac{p^2+2p+3}{(1+p)^2}\left(\ln x+(2\gamma-1)-\frac{24\zeta'(2)}{\pi^2}\right.$$
$$\left.-4\sum_p \frac{p\ln p}{(p^2+2p+3)(1+p)}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

从而证明了定理2.1.2 与定理2.1.3.

§2.2 k-full 数列

设$k\geq 2$ 为整数, n 为自然数. 若对任意素数p 都有$p^k\nmid n$, 就称n 为无k 次因子数. 若由$p\mid n$ 一定可推出$p^k\mid n$, 则称n 为k-full 数. F. Smarandache 建议研究该数列的性质. 本节将利用解析方法研究k-full数的渐近性质, 并给出一些渐近公式.

定理2.2.1. 对任意实数$x\geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} n = \frac{6kx^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ 是任意正实数.

定理2.2.2. 设$\phi(n)$ 为*Euler* 函数, 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} \phi(n) = \frac{6kx^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p-p^{\frac{1}{k}}}{p^{2+\frac{1}{k}}-p^2+p^{1+\frac{1}{k}}-p}\right)$$
$$+O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

定理2.2.3. 设$\alpha>0$, $\sigma_\alpha(n)=\sum_{d\mid n} d^\alpha$. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} \sigma_\alpha(n)$$
$$=\frac{6kx^{\alpha+\frac{1}{k}}}{(k\alpha+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p^{\alpha+\frac{1}{k}}(p^{\frac{1}{k}}-1)\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{p^l}\right)^\alpha+p^{\alpha+\frac{1}{k}}+p^{\frac{1}{k}}-1}{(p^{\alpha+\frac{1}{k}}-1)(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)$$
$$+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

定理2.2.4. 设$d(n)$ 为*Dirichlet* 除数函数. 则对任意实数$x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} d(n) = \frac{6kx^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{(2p^{\frac{1}{k}}-1)\sum\limits_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i}p^{k+1-i}-kp^{k+\frac{1}{k}}}{(p+1)^{k+1}(p^{\frac{1}{k}}-1)^2}\right)f(\log x)$$
$$+O(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}),$$

其中$f(y)$ 是关于y 的次数为k 的多项式.

定理2.2.5. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} \sigma_\alpha((m,n))$$
$$= \frac{6kx^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta\leq k}}\left(1+\frac{p^{\frac{1}{k}}\sum\limits_{i=0}^{\beta}p^{i\alpha}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)$$
$$\times\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta>k}}\left(1+\sum_{i=k}^{\beta-1}p^{-\frac{i}{k}}\sum_{j=0}^{i}p^{j\alpha}+\frac{p^{\frac{1}{k}}\sum\limits_{i=0}^{\beta}p^{i\alpha}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right)$$
$$+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),$$

其中m 是给定的整数, (m,n) 表示m 与n 的最大公因数.

定理2.2.6. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} \sigma_\alpha((m,n))$$
$$= \frac{6kx^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta\leq k}}\left(1+\frac{(p^\beta-p^{\beta-1})p^{\frac{1}{k}}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)$$
$$\times\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta>k}}\left(1+\sum_{i=k}^{\beta-1}p^{-\frac{i}{k}}(p^i-p^{i-1})+\frac{(p^\beta-p^{\beta-1})p^{\frac{1}{k}}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right)$$
$$+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

现在证明这些定理. 为方便起见, 定义函数$a(n)$ 如下:

$$a(n)=\begin{cases}1, & \text{如果 } n=1;\\ n, & \text{如果 } n \text{ 是 } k\text{-full 数};\\ 0, & \text{如果 } n \text{ 不是 } k\text{-full 数}.\end{cases}$$

显然有

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} n = \sum_{n\leq x} a(n).$$

设

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

由Euler乘积公式可得,

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{a(p^k)}{p^{ks}} + \frac{a(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}} + \cdots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{k(s-1)}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{k(s-1)}}\right) \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p^{k(s-1)}+1)(p^{s-1}-1)}\right) \\ &= \frac{\zeta(k(s-1))}{\zeta(2k(s-1))} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p^{k(s-1)}+1)(p^{s-1}-1)}\right), \end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数. 显然有不等式

$$|a(n)| \leq n, \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^\sigma}\right| < \frac{1}{\sigma - 1 - \frac{1}{k}},$$

其中$\sigma > 1 - \dfrac{1}{k}$ 是s 的实部. 则由Perron 公式有

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x} \frac{a(n)}{n^{s_0}} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s \\ &\quad + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) \\ &\quad + O\left(x^{1-\sigma_0} H(2x) \min\left(1, \frac{\log x}{T}\right)\right) \\ &\quad + O\left(x^{-\sigma_0} H(N) \min\left(1, \frac{x}{||x||}\right)\right), \end{aligned}$$

其中N 是最靠近x 的整数, $||x|| = |x - N|$. 取

$$s_0 = 0,\ b = 2 + \frac{1}{k},\ T = x^{1+\frac{1}{2k}},\ H(x) = x,\ B(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1 - \frac{1}{k}},$$

有

$$\sum_{n\leq x}a(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_{2+\frac{1}{k}-iT}^{2+\frac{1}{k}+iT}\frac{\zeta(k(s-1))}{\zeta(2k(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),$$

其中

$$R(s)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{k(s-1)}+1)(p^{s-1}-1)}\right).$$

为了估计主项

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2+\frac{1}{k}-iT}^{2+\frac{1}{k}+iT}\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)\mathrm{d}s,$$

我们把积分线从$s=2+\dfrac{1}{k}\pm iT$ 移到$s=1+\dfrac{1}{2k}\pm iT$. 此时函数

$$\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)$$

在$s=1+\dfrac{1}{k}$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{kx^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\zeta(2)}R\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{2+\frac{1}{k}-iT}^{2+\frac{1}{k}+iT}+\int_{2+\frac{1}{k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}+iT}+\int_{1+\frac{1}{2k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}-iT}+\int_{1+\frac{1}{2k}-iT}^{2+\frac{1}{k}-iT}\right)\\&\qquad\times\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{kx^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\zeta(2)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right).\end{aligned}$$

不难证明估计式

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2+\frac{1}{k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}+iT}+\int_{1+\frac{1}{2k}-iT}^{2+\frac{1}{k}-iT}\right)\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)\right|\\&\ll\int_{1+\frac{1}{2k}}^{2+\frac{1}{k}}\left|\frac{\zeta(k(\sigma-1+iT))}{\zeta(2k(\sigma-1+iT))}R(s)\frac{x^{2+\frac{1}{k}}}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\\&\ll\frac{x^{2+\frac{1}{k}}}{T}=x^{1+\frac{1}{2k}}\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{2k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}-iT}\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)\mathrm{d}s\\
&\ll \int_1^T\left|\frac{\zeta(1/2+ikt)}{\zeta(1+2ikt)}\frac{x^{1+\frac{1}{2k}}}{t}\right|\mathrm{d}t\\
&\ll x^{1+\frac{1}{2k}+\epsilon}.
\end{aligned}$$

注意到$\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 由上可得

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\le x}}n=\frac{6kx^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理2.2.1.

定义

$$f_1(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s},\qquad f_2(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s},$$

$$f_3(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s},\qquad f_4(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha((m,n))}{n^s},$$

$$f_5(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\phi((m,n))}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式得

$$\begin{aligned}
f_1(s)&=\prod_p\left(1+\frac{\phi(p^k)}{p^{ks}}+\frac{\phi(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\\
&=\prod_p\left(1+\frac{\phi(p^k)}{p^{ks}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right)\right)\\
&=\frac{\zeta(k(s-1))}{\zeta(2k(s-1))}\prod_p\left(1+\frac{p-p^{s-1}}{(p^{k(s-1)}+1)(p^s-p)}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(s)=&\frac{\zeta(k(s-\alpha))}{\zeta(2k(s-\alpha))}\\
&\times\prod_p\left(1+\frac{(p^{s-\alpha}-1)p^s\sum\limits_{i=1}^{k}(\frac{1}{p^i})^\alpha+p^s+p^{s-\alpha}-1}{(p^{k(s-\alpha)}+1)(p^{s-\alpha}-1)(p^s-1)}\right);
\end{aligned}$$

$$f_3(s) = \frac{\zeta^{k+1}(ks)}{\zeta^{k+1}2ks} \times \prod_p \left(1 + \frac{(2p^s-1)\sum\limits_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i}p^{k(k+1-i)s} - kp^{(k^2+1)s}}{(p^{k_s}+1)^{k+1}(p^s-1)^2}\right);$$

$$\begin{aligned} f_4(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{\sigma_\alpha((m,p^k))}{p^{ks}} + \frac{\sigma_\alpha((m,p^{k+1}))}{p^{(k+1)s}} + \cdots\right) \\ &= \frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)} \prod_{p|m}\left(\frac{p^{ks}}{p^{ks}+1}\right)\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{p^\beta \| m \\ \beta \le k}} \left(1 + \frac{\sigma_\alpha(p^\beta)}{p^{ks}(1-\frac{1}{p^s})}\right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{p^\beta \| m \\ \beta > k}} \left(1 + \sum_{i=k}^{\beta-1}\frac{\sigma_\alpha(p^i)}{p^{is}} + \frac{\sigma_\alpha(p^\beta)}{p^{ks}(1-\frac{1}{p^s})}\right) \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} f_5(s) &= \frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)} \prod_{p|m}\left(\frac{p^{ks}}{p^{ks}+1}\right)\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{p^\beta \| m \\ \beta \le k}} \left(1 + \frac{p^\beta - p^{\beta-1}}{p^{ks}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}\right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{p^\beta \| m \\ \beta > k}} \left(1 + \sum_{i=k}^{\beta-1}\frac{p^i - p^{i-1}}{p^{is}} + \frac{p^\beta - p^{\beta-1}}{p^{ks}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}\right). \end{aligned}$$

再由相似的方法可证其余定理.

§2.3 M 次幂剩余数

设自然数 $m \ge 2$, 正整数 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$. 定义$m$ 次幂剩余数

$$a_m(n) = p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r},$$

其中

$$\beta_i = \min(m-1, \alpha_i), \qquad 1 \le i \le r.$$

F. Smanrandache 建议研究m 次幂剩余数的性质. 定义两个新的数论函数$U(n)$ 与$V(n)$ 如下:

$$U(1)=1,\quad U(n)=\prod_{p|n}p,$$
$$V(1)=1,\quad V(n)=V(p_1^{\alpha_1})\cdots V(p_r^{\alpha_r})=(p_1^{\alpha_1}-1)\cdots(p_r^{\alpha_r}-1),$$

其中$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$. 显然$U(n)$ 与$V(n)$ 都是可乘函数. 本节利用解析方法研究$U(n)$ 与$V(n)$ 在m 次幂剩余数上的分布, 并给出两个渐近公式.

定理2.3.1. 令A 表示m 次幂剩余数的集合. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}}U(n)=\frac{3x^2}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^3+p^2-p-1}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ是任意正实数.

定理2.3.2. 对任意实数$x\geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}}V(n)=\frac{x^2}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^m}+\frac{1-p^m}{p^{m+2}+p^{m+1}}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

现在证明这些定理. 设

$$f(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{U(n)}{n^s}.$$

由Euler乘积公式有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{U(p)}{p^s}+\frac{U(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{U(p^{m-1})}{p^{(m-1)s}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{U(p^m)}{p^{ms}}+\frac{U(p^{m+1})}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2s-1}}+\cdots+\frac{1}{p^{(m-1)s-1}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{p^{ms-1}}+\frac{1}{p^{(m+1)s-1}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2s-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p\left(1+\frac{p^s}{(p^s-1)(p^{2s-1}+p^s)}\right),$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta函数. 易得不等式

$$|U(n)|\le n,\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n^\sigma}\right|<\frac{1}{\sigma-2},$$

其中$\sigma>2$是s的实部. 注意到函数

$$\frac{\zeta(s-1)x^s}{\zeta(2(s-1))s}\prod_p\left(1+\frac{p^s}{(p^s-1)(p^{2s-1}+p^s)}\right)$$

在$s=2$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{x^2}{2\zeta(2)}R(2),$$

则由Perron 公式可证

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}U(n)=\frac{3x^2}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^3+p^2-p-1}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理2.3.1.

定义

$$g(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{V(n)}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
g(s) &= \prod_p\left(1+\frac{V(p)}{p^s}+\frac{V(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{V(p^{m-1})}{p^{(m-1)s}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{V(p^m)}{p^{ms}}+\frac{V(p^{m+1})}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{p-1}{p^s}+\frac{p^2-1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^{m-1}-1}{p^{(m-1)s}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{p^m-1}{p^{ms}}+\frac{p^{m+1}-1}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^{m(s-1)}}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}-\left(\frac{1-\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\left(\frac{p^{m-1}}{p^{ms}}-\frac{1}{p^s}\right)\right)\\
&= \zeta(s-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{m(s-1)}}+\frac{\left(p^{m-1}-p^{(m-1)s}\right)(p^s-p)}{p^{ms}(p^s-1)}\right).
\end{aligned}$$

再由相似的方法可证定理2.3.2.

§2.4 Smarandache 无理根筛数列

从不包含0 与1的自然数集合中,
–去掉所有的2^k, $k \geq 2$;
–去掉所有的3^k, $k \geq 2$;
–去掉所有的5^k, $k \geq 2$;
–去掉所有的6^k, $k \geq 2$;
–去掉所有的7^k, $k \geq 2$;
–去掉所有的10^k, $k \geq 2$;
$\cdots\cdots$
依次继续下去, 最终可得到所谓的Smarandache 无理根筛数列:

$$2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, \cdots$$

设A 表示所有的无理根筛的集合. 本节将研究无理根筛数列的均值, 并给出一个渐近公式.

定理2.4.1. *设$d(n)$ 为Dirichlet 除数函数. 则对任意实数$x \geq 1$, 有渐近公式*

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} d(n)\\ &= \left(x - \frac{3}{4\pi^2}\sqrt{x}\ln x + A_1 x^{\frac{1}{3}}\ln^2 x + A_2 x^{\frac{1}{3}}\ln x + A_3 x^{\frac{1}{3}} + A_4\sqrt{x}\right)\ln x\\ &\quad +(2\gamma-1)x + A_5\sqrt{x} + A_6 x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{139}{429}+\epsilon}\right),\end{aligned}$$

其中ϵ 是任意正实数, γ 是Euler常数, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是可计算的常数.

首先引入下面的一些引理.

引理2.4.1. *对任意实数$x \geq 1$, 有*

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O\left(x^{\frac{139}{429}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ 是任意正实数, γ 是Euler常数.

证明. 参阅文献[32]. □

引理2.4.2. *对任意实数$x \geq 1$, 有*

$$\sum_{n\leq\sqrt{x}} d(n^2) = \frac{3\sqrt{x}\ln^2 x}{4\pi^2} + \frac{B_1}{2}\sqrt{x}\ln x + B_2\sqrt{x} + O\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right);$$

$$\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}} d(n^3)=\frac{6C_0x^{\frac{1}{3}}\ln^3 x}{27\pi^4}+\frac{C_1}{9}x^{\frac{1}{3}}\ln^2 x+\frac{C_2}{3}x^{\frac{1}{3}}\ln x$$
$$+C_3x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}+\epsilon}\right),$$

其中B_1,B_2,C_0,C_1,C_2,C_3是可计算的常数.

证明. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n^2)}{n^s},\qquad \text{Re } s>1.$$

由Euler 乘积和$d(n)$ 的可乘性可得

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\frac{7}{p^{3s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{2}{p^{2s}}+\frac{2}{p^{3s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}+\frac{2}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\right)\\
&= \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\\
&= \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)},
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta函数. 在Perron公式中取$s_0=0,T=x^{\frac{1}{2}},b=\dfrac{3}{2}$, 有

$$\sum_{n<x} d(n^2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个3 阶极点, 留数为

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{2!}\left((s-1)^3\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}\right)^{(2)}=\frac{3}{\pi^2}x\ln^2 x+B_1x\ln x+B_2x,$$

其中B_1,B_2是可计算的常数. 则有

$$\sum_{n\le x} d(n^2)=\frac{3x\ln^2 x}{\pi^2}+B_1x\ln x+B_2x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

即就是

$$\sum_{n\le\sqrt{x}} d(n^2) = \frac{3\sqrt{x}\ln^2 x}{4\pi^2} + \frac{B_1}{2}\sqrt{x}\ln x + B_2\sqrt{x} + O\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right).$$

这就证明了引理的第一个公式.

定义

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^3)}{n^s}, \qquad \text{Re } s > 1.$$

则由Euler乘积有

$$\begin{aligned} g(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{4}{p^s} + \frac{7}{p^{2s}} + \frac{10}{p^{3s}} + \cdots\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \frac{3}{p^{3s}} + \cdots\right) \\ &= \prod_p \left(\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} + \frac{3}{p^s}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2}\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \left(1 + \frac{2}{p^s}\right) \\ &= \frac{\zeta^4(s)}{\zeta^2(2s)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p^s+1)^2}\right), \end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta函数. 再由Perron公式可得

$$\sum_{n\le x} d(n^3) = \frac{6}{\pi^4} C_0 x \ln^3 x + C_1 x \ln^2 x + C_2 x \ln x + C_3 x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

即就是

$$\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}} d(n^3) = \frac{6C_0 x^{\frac{1}{3}} \ln^3 x}{27\pi^4} + \frac{C_1}{9} x^{\frac{1}{3}} \ln^2 x + \frac{C_2}{3} x^{\frac{1}{3}} \ln x + C_3 x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{6}+\epsilon}\right),$$

从而证明了引理2.4.2. □

现在证明定理2.4.1. 由引理2.4.1与引理2.4.2, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} d(n) \\ &= \sum_{n\le x} d(n) - \sum_{n\le\sqrt{x}} d(n^2) - \sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}} d(n^3) + O\left(\sum_{4\le k\le\frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{n\le x^{\frac{1}{k}}} d(n^k)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\le x} d(n) - \sum_{n\le\sqrt{x}} d(n^2) - \sum_{n\le x^{\frac13}} d(n^3) + O\left(\sum_{4\le k\le \frac{\ln x}{\ln 2}} x^{\frac1k+\epsilon}\right)\\
&= \left(x - \frac{3\sqrt{x}\ln x}{4\pi^2} + A_1 x^{\frac13}\ln^2 x + A_2 x^{\frac13}\ln x + A_3 x^{\frac13} + A_4\sqrt{x}\right)\ln x\\
&\quad +(2\gamma-1)x + A_5\sqrt{x} + A_6 x^{\frac13} + O(x^{\frac{139}{429}+\epsilon}),
\end{aligned}
$$

其中$A_i(i=1,2,\cdots,6)$是可计算的常数.

§2.5 关于squarefree 与squarefull 数列

设p 为奇素数. 对任意与p 互素的整数a, 满足$a^f \equiv 1 \bmod p$ 的最小的正整数f 称为a 对模p 的指数. 如果$f = p-1$, then a 称为模p 的原根. 定义$prim(x)$为模p 的不超过x 的正原根数目. 由[36] 可得

$$
prim(x) = \frac{\phi(p-1)}{p-1}\left(x + O\left(2^{\omega(p-1)}\cdot\sqrt{p}\log p\right)\right),
$$

其中$\phi(q)$ 为Euler 函数, $\omega(q)$ 为q 的不同素因子的个数.

此外, 一个整数如果不能被任何素数的k 次幂整除, 就称为k-free ($k\ge 2$, 为整数). 反过来, 一个整数q 被称为k-full, 如果$p|q$ 当且仅当$p^k|q$. 许多学者研究过k-free 数和k-full 数的性质. 例如, 定义$Q_k(x)$ 为不超过x 的k-free 数的数目, Gegenbauer[10] 给出了估计式:

$$
Q_k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O\left(x^{1/k}\right),
$$

其中$\zeta(k)$ 为Riemann zeta 函数.

现在我们考虑不超过x 的squarefree 或squarefull 原根的数目. 由[36] 可得下面的两个命题.

命题2.5.1. 模p 的不超过x 的*squarefree* 正原根的数目为

$$
\frac{\phi(p-1)}{p-1}\left(C_1 x + O\left(2^{\omega(p-1)}\cdot p^{1/4}\cdot(\log p)^{1/2}\cdot x^{1/2}\right)\right),
$$

其中

$$
C_1 = \prod_p \left(1 - 1/p^2\right).
$$

命题2.5.2. 模p 的不超过x 的*squarefull* 正原根的数目为

$$
\frac{\phi(p-1)}{p-1}\left(C_2 x^{1/2} + O\left(2^{\omega(p-1)}\cdot p^{1/6}\cdot(\log p)^{1/3}\cdot x^{1/3}\right)\right),
$$

其中

$$C_2 = 2\left(\sum_{\substack{q \ \ squallfree \\ \left(\frac{q}{p}\right)=-1}} 1/q^{3/2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

此外$\left(\frac{q}{p}\right)$ 为*Legendre* 符号.

一个整数n 称为是模p 的二次剩余, 如果同余方程$x^2 \equiv n \bmod p$ 有解. 由[33]我们有

命题2.5.3. 设p 为素数, $0 < a \le 1/128$, $x > p^{1/4+b}$ 且$b = b(a) > 0$. 则模p 的不超过x 的*squarefree* 二次剩余的数目为

$$\frac{3}{\pi^2}x + O\left(x/p^a\right).$$

上述命题中的误差项不是最好的. 在本节中, 我们利用Heath-Brown[14] 和Yoichi Motohashi[30] 的重要工作, 以及Dirichlet L- 函数的性质来给出三个更佳的估计式. 即就是证明下面三个定理.

定理2.5.1. 模p 的不超过x 的*squarefree* 正原根的数目为

$$\frac{p\phi(p-1)}{(p^2-1)\zeta(2)}x + O\left(p^{9/44}x^{1/2+\epsilon}\right),$$

其中ϵ 为任意正实数.

定理2.5.2. 模p 的不超过x 的*squarefull* 正原根的数目为

$$\frac{2C_3 p\phi(p-1)}{(p^2-1)\zeta(2)}x^{1/2} + O\left(p^{9/44}x^{1/4+\epsilon}\right),$$

其中

$$\begin{aligned} C_3 \quad = \quad & \left[\prod_{p_1 \neq p}\left(1+\frac{1}{\left(p_1^{1/2}-1\right)(p_1+1)}\right)\right. \\ & \left. -\prod_{p_1 \neq p}\left(1+\frac{\left(\frac{p_1}{p}\right)}{\left(p_1^{1/2}-\left(\frac{p_1}{p}\right)\right)(p_1+1)}\right)\right]. \end{aligned}$$

定理2.5.3. 模p 的不超过x 的*squarefree* 二次剩余的数目为

$$\frac{3}{\pi^2}x + O\left(p^{9/44}x^{1/2+\epsilon}\right).$$

为了完成定理的证明, 我们需要几个引理.

引理2.5.1. 设素数$p > 2$, 则

$$\sum_{k|p-1}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{a=1}^{k}{}' e\left(\frac{aindn}{k}\right) = \begin{cases} \dfrac{p-1}{\phi(p-1)}, & \text{如果 } n \text{ 为模 } p \text{ 的原根;} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

其中$ind\ n$ 表示n 对模p 的以某个固定原根为底的指标.

证明. 参阅文献[38]. □

引理2.5.2. 对于模q 的任意特征χ, 我们有

$$L(1/2+it,\chi) \ll (q(|t|+1))^{3/16+\epsilon}.$$

证明. 参阅文献[14]. □

引理2.5.3. 设χ 为模q 的原特征, 则有

$$\int_0^T |L(1/2+it,\chi)|^2\, dt - \frac{\phi(q)}{q}T\left[\log(qT/2\pi)+2\gamma+2\sum_{p|q}(\log p)/(p-1)\right] \ll \left((qT)^{1/3}+q^{1/2}\right)(\log qT)^4,$$

其中 $T \geq 1$, γ 为$Euler$ 常数.

证明. 参阅文献[30]. □

引理2.5.4. 设χ 为模p 的原特征, 实数$T \geq 1$, 我们有

$$\int_0^T \left|\frac{L(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| dt \ll p^{9/44+\epsilon}$$

和

$$\int_0^T \left|\frac{\zeta(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| dt \ll T^{\epsilon}.$$

证明. 设$0 < u < p$, 由Cauchy 不等式, 引理2.5.2 和引理2.5.3 有

$$\int_0^T \left|\frac{L(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^u \left|\frac{L(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| \mathrm{d}t + \int_u^T \left|\frac{L(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| \mathrm{d}t \\
&\ll u^{3/16+\epsilon}p^{3/16} + \left(\int_u^T \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left[\int_u^T \frac{|L(1/2+it,\chi)|^2}{t+1}\mathrm{d}t\right]^{1/2} \\
&\ll u^{3/16+\epsilon}p^{3/16} + T^{\epsilon} \left[\int_u^T \frac{\mathrm{d}\left(\int_u^t |L(1/2+it,\chi)|^2 \,\mathrm{d}s\right)}{t+1}\right]^{1/2} \\
&\ll u^{3/16+\epsilon}p^{3/16} \\
&\quad + \left[p^{1/3}T^{\epsilon-2/3} + p^{1/2}T^{\epsilon-1} + p^{1/3}u^{\epsilon-2/3} + p^{1/2}u^{\epsilon-1}\right]^{1/2} \\
&\ll u^{3/16+\epsilon}p^{3/16} + p^{1/4}u^{\epsilon-1/2}.
\end{aligned}$$

在上式中取$u = p^{1/11}$, 可得

$$\int_0^T \left|\frac{L(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| \mathrm{d}t \ll p^{9/44+\epsilon}.$$

类似的我们有

$$\int_0^T \left|\frac{\zeta(1/2+it,\chi)}{t+1}\right| \mathrm{d}t \ll T^{\epsilon}.$$

证毕. □

引理2.5.5. 定义A 为*squarefree* 数的集合, χ 为模p 的任意特征, 则有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \chi(n) = \begin{cases} \dfrac{p}{p+1}\cdot\dfrac{x}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/2+\epsilon}\right), & \text{如果}\chi \text{ 是模}p \text{ 的主特征;} \\ O\left(p^{9/44}x^{1/2+\epsilon}\right), & \text{其它.} \end{cases}$$

证明. 显然有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \chi(n) = \sum_{n\le x} \mu^2(n)\chi(n).$$

定义

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)\chi(n)}{n^s},$$

由Euler 乘积公式有

$$f(s) = \prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi(p_1)}{{p_1}^s}\right) = \frac{L(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)}.$$

注意到

$$\left|\mu^2(n)\chi(n)\right| \le 1 \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu^2(n)\chi(n)\right| n^{-\sigma} \le \zeta(\sigma).$$

设$s_0 = \sigma_0 + it_0$, 则由Perron 公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{\mu^2(n)\chi(n)}{n^{s_0}} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \\ &+O\left(\frac{x^b\zeta(b+\sigma_0)}{T}\right) \\ &+O\left(x^{1-\sigma_0}\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right) \\ &+O\left(x^{-\sigma_0}\min\left(1,\frac{x}{||x||}\right)\right).\end{aligned}$$

即就是

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\chi(n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{L(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \\ &+O\left(\frac{x^b\zeta(b)}{T}\right) \\ &+O\left(x\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right).\end{aligned}$$

如果χ 为模p 的非主特征, 则在上式中取$b = 1/2$, $T = x^{1/2}$, 由引理2.5.4 容易得到

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\chi(n) &\ll \int_0^T\left|\frac{L(1/2+it,\chi)}{L(1+2it,\chi^2)}\frac{x^{1/2+\epsilon}}{(t+1)}\right|\mathrm{d}t + O\left(x^{1/2+\epsilon}\right) \\ &\ll p^{9/44}x^{1/2+\epsilon}.\end{aligned}$$

另一方面, 如果χ 为模p 的主特征, 由于$L(s,\chi) = \zeta(s)(1-p^{-s})$, 则取$b = 2$, $T = x^{3/2}$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\chi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\frac{\zeta(s)(1-p^{-s})}{\zeta(2s)(1-p^{-2s})}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{1/2+\epsilon}\right).$$

现在把积分线从$s = 2\pm iT$ 移到$s = 1/2\pm iT$. 此时, 函数

$$\frac{\zeta(s)(1-p^{-s})}{\zeta(2s)(1-p^{-2s})}\frac{x^s}{s}$$

在$s = 1$ 处有一个一阶极点, 留数为

$$\frac{p}{p+1}\frac{x}{\zeta(2)}.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT}^{2+iT}+\int_{2+iT}^{1/2+iT}+\int_{1/2+iT}^{1/2-iT}+\int_{1/2-iT}^{2-iT}\right)$$
$$\times\frac{\zeta(s)(1-p^{-s})}{\zeta(2s)(1-p^{-2s})}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{p}{p+1}\frac{x}{\zeta(2)}.$$

注意到估计式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2+iT}^{1/2+iT}\frac{\zeta(s)(1-p^{-s})}{\zeta(2s)(1-p^{-2s})}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$
$$\ll\int_{1/2}^{2}\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\zeta(2\sigma+2it)}\frac{x^{2+\epsilon}}{T}\right|\mathrm{d}\sigma$$
$$\ll\frac{x^{2+\epsilon}}{T}=x^{1/2+\epsilon},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-iT}^{2-iT}\frac{\zeta(s)(1-p^{-s})}{\zeta(2s)(1-p^{-2s})}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$
$$\ll\int_{1/2}^{2}\left|\frac{\zeta(\sigma-it)}{\zeta(2\sigma-2it)}\frac{x^{2+\epsilon}}{T}\right|\mathrm{d}\sigma$$
$$\ll\frac{x^{2+\epsilon}}{T}=x^{1/2+\epsilon}$$

和

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2+iT}^{1/2-iT}\frac{\zeta(s)(1-p^{-s})}{\zeta(2s)(1-p^{-2s})}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$
$$\ll\int_{0}^{T}\left|\frac{\zeta(1/2+it)}{\zeta(1+2it)}\frac{x^{1/2+\epsilon}}{(t+1)}\right|\mathrm{d}t$$
$$\ll x^{1/2+\epsilon},$$

因此有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\chi(n)=\frac{p}{p+1}\cdot\frac{x}{\zeta(2)}+O\left(x^{1/2+\epsilon}\right),\qquad \text{如果}\chi\text{ 是模}p\text{ 的主特征.}$$

证毕. □

引理2.5.6. 定义B 为*squarefull* 数的集合, χ 为模p 的任意特征, 则有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\chi(n)=\begin{cases}\dfrac{2f(\chi)px^{1/2}}{(p+1)\,\zeta(2)}+O\left(x^{1/4+\epsilon}\right), & \text{如果}\chi^2\text{ 是模}p\text{ 的主特征;}\\ O\left(p^{9/44}x^{1/4+\epsilon}\right), & \text{其它,}\end{cases}$$

其中

$$f(\chi)=\prod_{p_1\neq p}\left(1+\frac{\chi(p_1)}{\left(p_1^{1/2}-\chi(p_1)\right)(p_1+1)}\right).$$

证明. 定义函数$a(n)$ 如下:

$$a(n)=\begin{cases}1, & \text{如果 } n=1;\\ \chi(n), & \text{如果 } n \text{ 为squarefull 数};\\ 0, & \text{如果 } n \text{ 不为squarefull 数}.\end{cases}$$

显然

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\chi(n)=\sum_{n\le x}a(n).$$

设

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}f(s) &= \prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi^2(p_1)}{{p_1}^{2s}}+\frac{\chi^3(p_1)}{{p_1}^{3s}}+\cdots\right)\\ &= \prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi^2(p_1)}{p_1^{2s}}\cdot\frac{p^s}{p^s-\chi(p)}\right)\\ &= \prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi^2(p_1)}{p_1^{2s}}\right)\prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi^3(p_1)}{(p_1^s-\chi(p))\,(p_1^{2s}+\chi^2(p))}\right)\\ &= \frac{L(2s,\chi^2)}{L(4s,\chi^4)}\prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi^3(p_1)}{(p_1^s-\chi(p))\,(p_1^{2s}+\chi^2(p))}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$|a(n)|\le 1 \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|\,n^{-\sigma}\le\zeta(\sigma).$$

设$s_0=\sigma_0+it_0$, 则由Perron 公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n^{s_0}} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\ &\quad +O\left(\frac{x^b\zeta(b+\sigma_0)}{T}\right)\\ &\quad +O\left(x^{1-\sigma_0}\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)\\ &\quad +O\left(x^{-\sigma_0}\min\left(1,\frac{x}{||x||}\right)\right).\end{aligned}$$

即就是

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\chi(n)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{L(2s,\chi^2)}{L(4s,\chi^4)}\prod_{p_1}\left(1+\frac{\chi^3(p_1)}{(p_1^s-\chi(p))\,(p_1^{2s}+\chi^2(p))}\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\
&\quad +O\left(\frac{x^b\zeta(b)}{T}\right)+O\left(x\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right).
\end{aligned}$$

利用引理2.5.5 中的方法我们可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\chi(n)=\begin{cases}\dfrac{2f(\chi)px^{1/2}}{(p+1)\,\zeta(2)}+O\left(x^{1/4+\epsilon}\right), & \text{如果}\chi^2\text{ 是模}p\text{ 的主特征;}\\ O\left(p^{9/44}x^{1/4+\epsilon}\right), & \text{其它.}\end{cases}$$

证毕. □

现在我们来证明定理. 定义C 为模p 的原根之集. 注意到

$$\chi_{a,k}(n)=\mathrm{e}\left(\frac{a\mathrm{ind}n}{k}\right)$$

是模p 的特征, $\chi_{a,k}$ 为主特征当且仅当$k=1$. 因此由引理2.5.1 和引理2.5.5 有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A\\ n\in C}} &= \frac{\phi(p-1)}{p-1}\sum_{k|p-1}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{a=1}^{k}{}'\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A\\ (n,p)=1}}\mathrm{e}\left(\frac{a\mathrm{ind}n}{k}\right)\\
&= \frac{\phi(p-1)}{p-1}\sum_{k|p-1}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{a=1}^{k}{}'\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\chi_{a,k}(n)\\
&= \frac{p\phi(p-1)}{(p^2-1)\zeta(2)}x+O\left(p^{9/44}x^{1/2+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

这就证明了定理2.5.1.

注意到$\chi_{a,k}^2$ 为主特征当且仅当$k=1$ 或$k=2$. 因此由引理2.5.1 和引理2.5.6 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B\\ n\in C}} &= \frac{\phi(p-1)}{p-1}\sum_{k|p-1}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{a=1}^{k}{}'\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B\\ (n,p)=1}}\mathrm{e}\left(\frac{a\mathrm{ind}n}{k}\right)\\
&= \frac{\phi(p-1)}{p-1}\sum_{k|p-1}\frac{\mu(k)}{\phi(k)}\sum_{a=1}^{k}{}'\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\chi_{a,k}(n)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2C_3 p\phi(p-1)}{(p^2-1)\zeta(2)} x^{1/2} + O\left(p^{9/44} x^{1/4+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理2.5.2.

定义D 为模p 的二次剩余之集, 由引理2.5.5 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A\\ n\in D}} &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{n}{p}\right)\right) = \frac{x}{2\zeta(2)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(\frac{n}{p}\right) \\ &= \frac{3}{\pi^2}x + O\left(p^{9/44}x^{1/2+\epsilon}\right). \end{aligned}$$

这就完成了定理2.5.3 的证明.

§2.6 Smarandache 伪数列

一个数称为是第二类Smarandache 伪奇数, 如果它本身是偶数, 但是对其数位作某个置换后就变成奇数. 例如

$$10, 12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36, 38, 50, 52, \cdots$$

都是第二类Smarandache 伪奇数. 设A 表示第二类Smarandache 伪奇数的集合. 类似地, 可定义第二类Smarandache 伪偶数. 如果一个奇数的数位作某个置换之后变成一个偶数, 那么这个数被称为第二类Smarandache 伪偶数. 例如

$$21, 23, 25, 27, 29, 41, 43, 45, 47, 49, \cdots$$

就是第二类Smarandache伪偶数. 令B 表示第二类Smarandache伪偶数的集合. 本节研究这两类数列的性质, 并给出一些渐近公式.

定理2.6.1. *对任意实数$x \ge 1$, 有*

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} 1 = \frac{1}{2}x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)$$

与

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\le x}} 1 = \frac{1}{2}x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right).$$

定理2.6.2. *设实数$x \ge 1$, $d(n)$ 为Dirichlet 除数函数. 则有渐近公式*

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} d(n) = \frac{3}{4}x\ln x + \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4}\right)x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}+\epsilon}\right)$$

与

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\le x}} d(n)=\frac{1}{4}x\ln x+\left(\frac{1}{2}\gamma+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}\right)x+O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}+\epsilon}\right),$$

其中γ 是*Euler* 常数, ϵ 是任意正实数.

为了证明定理, 首先引入两个引理.

引理2.6.1. 对任意实数$x\ge 1$, 有

$$\sum_{n\le\frac{x+1}{2}} d(2n-1)=\frac{1}{4}x\ln x+\frac{1}{4}(2\gamma+2\ln 2-1)x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中γ 是*Euler*常数, ϵ 是任意实数.

证明. 设s 为复数, Re $s>1$. 定义$f(s)$为

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(2n-1)}{(2n-1)^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_{p\ne 2}\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{3}{p^{2s}}+\cdots\right)=\prod_{p\ne 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2\\ &= \zeta^2(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^2, \end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann Zeta函数.

在Perron 公式中取$s_0=0, T=x^{1/2}, b=3/2$, 可得

$$\sum_{2n-1<x} d(2n-1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\zeta^2(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^2\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

注意到函数

$$\zeta^2(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^2\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个二阶极点, 留数为

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{1!}\left((s-1)^2\zeta^2(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^2\frac{x^s}{s}\right)'=\frac{1}{4}x\ln x+\frac{1}{4}(2\gamma+2\ln 2-1)x,$$

其中γ 是Euler常数. 则可得

$$\sum_{2n-1\le x} d(2n-1)=\frac{1}{4}x\ln x+\frac{1}{4}(2\gamma+2\ln 2-1)x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

这就证明了引理2.6.1. □

引理2.6.2. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{2n \notin A \\ 2n \leq x}} 1 = O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)$$

与

$$\sum_{\substack{2n-1 \notin B \\ 2n-1 \leq x}} 1 = O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right).$$

证明. 设k为正整数, 满足$10^k \leq x < 10^{k+1}$. 显然有$k \leq \log x < k+1$. 易证

$$\sum_{\substack{2n \notin A \\ 2n \leq x}} 1 \leq 5^k.$$

从而有

$$\sum_{\substack{2n \notin A \\ 2n \leq x}} 1 \leq 5^{\log x} = x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}.$$

类似还可得

$$\sum_{\substack{2n-1 \notin B \\ 2n-1 \leq x}} 1 = O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right).$$

这就证明了引理2.6.2. □

现在证明定理. 由引理2.6.2 有

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} 1 = \sum_{2n \leq x} 1 - \sum_{\substack{2n \notin A \\ 2n \leq x}} 1 = \frac{1}{2}x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)$$

以及

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n \leq x}} 1 = \sum_{2n-1 \leq x} 1 - \sum_{\substack{2n-1 \notin A \\ 2n-1 \leq x}} 1 = \frac{1}{2}x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right).$$

从而证明了定理2.6.1.

另一方面, 由引理2.6.1, 引理2.6.2 以及估计式$d(n) \leq n^{\epsilon}$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} d(n) &= \sum_{2n \leq x} d(2n) - \sum_{\substack{2n \notin A \\ 2n \leq x}} d(2n) \\
&= \sum_{n \leq x} d(n) - \sum_{2n-1 \leq x} d(2n-1) - \sum_{\substack{2n \notin A \\ 2n \leq x}} d(2n) \\
&= x \ln x + (2\gamma - 1)x - \frac{1}{4}x \ln x - \frac{1}{4}(2\gamma + 2\ln 2 - 1)x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}+\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}x\ln x + \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4}\right)x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}+\epsilon}\right).$$

类似还可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in B\\ n\le x}} d(n) &= \sum_{2n-1\le x} d(2n-1) - \sum_{\substack{2n-1\notin B\\ 2n-1\le x}} d(2n-1)\\ &= \frac{1}{4}x\ln x + \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right)x + O\left(x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}+\epsilon}\right).\end{aligned}$$

这就证明了定理2.6.2.

§2.7 k 次幂补函数

设n,k 为正整数, 且$k \ge 2$. $b_k(n)$ 称为n 的k 次幂补函数, 如果$b_k(n)$ 是使得$nb_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 定义两个新的集合

$$\begin{aligned}B &= \{n\in\mathbb{N}, b_k(n) \mid n\},\\ C &= \{n\in\mathbb{N}, n \mid b_k(n)\}.\end{aligned}$$

本节利用解析方法研究Dirichlet 除数函数$d(n)$ 在这两个集合上的均值, 并给出两个均值公式.

定理2.7.1. 对任意实数$x \ge 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} d(n) = \frac{mx^{\frac{1}{m}}}{\zeta^{m+1}(2)} R(p^{\frac{1}{m}}) f(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2m}+\epsilon}\right),$$

其中

$$R(p^{\frac{1}{m}}) = \prod_p \left(1 + \frac{p^m\left(\left(p^{\frac{1}{m}}-1\right)(m+1) + p^{\frac{1}{m}}\right)}{(p+1)^{m+1}(p^{\frac{1}{m}}-1)^2} - \frac{\left(p^{\frac{1}{m}}\right)^2 \sum\limits_{i=2}^{m+1} \binom{m+1}{i} p^{m+1-i}}{(p+1)^{m+1}(p^{\frac{1}{m}}-1)^2}\right),$$

$f(y)$ 是关于y 的多项式, 次数为$m = \left[\frac{k+1}{2}\right]$, ϵ是任意正实数.

定理2.7.2. 对任意正实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in C}} d(n) = \frac{x\log x}{\zeta(l+1)}\prod_p\left(1-\frac{(l+1)(p-1)}{p^{l+2}-p}\right)+Ax+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中$l=\left[\dfrac{k}{2}\right]$, A为常数.

现在证明定理. 设n的标准素因子分解式为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$, 则显然有

$$b_k(n)=b_k(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s})=b_k(p_1^{\alpha_1})b_k(p_2^{\alpha_2})\cdots b_k(p_s^{\alpha_s}).$$

即$b_k(n)$ 是可乘函数. 接下来研究$n=p^\alpha$时的情况.

(1) 设$\alpha\geq k$, 则由$b_k(n)$的定义有$b_k(n)\mid n$, 从而$n\in B$.

(2) 设$\alpha \leq k$, 则$b_k(n) = p^{k-\alpha}$. 由上可得, 当$\alpha \geq \left[\frac{k+1}{2}\right]$ 时$n\in B$, 而当$\alpha\leq\left[\frac{k}{2}\right]$ 时$n\in C$.

现在定义

$$f(s)=\sum_{n\in B}\frac{d(n)}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{d(p^m)}{p^{ms}}+\frac{d(p^{m+1})}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{m+1}{p^{ms}}+\frac{m+2}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{m+1}{p^{ms}}+\frac{m+1}{p^{ms}(p^s-1)}+\frac{p^s}{p^{ms}(p^s-1)^2}\right)\\
&= \frac{\zeta^{m+1}(ms)}{\zeta^{m+1}(2ms)}\prod_p\left(1+\frac{p^{m^2s}(p^s-1)(m+1)+p^s}{(p^{ms}+1)^{m+1}(p^s-1)^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{(p^s-1)^2\sum\limits_{i=2}^{m+1}\binom{m+1}{i}p^{m(m+1-i)s}}{(p^{ms}+1)^{m+1}(p^s-1)^2}\right),
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta函数, $m=\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$.

显然有

$$|d(n)|\leq n,\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^\sigma}\right|\leq\frac{1}{\sigma-1-\frac{1}{m}},$$

其中$\sigma > 1 - \dfrac{1}{m}$ 是s 的实部. 则在Perron公式中取

$$s_0 = 0,\ b = \frac{2}{m},\ T = x^{\frac{3}{2m}},$$

可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} d(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{2}{m}-iT}^{\frac{2}{m}+iT} \frac{\zeta^{m+1}(ms)}{\zeta^{m+1}(2ms)} R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{\frac{1}{2m}+\epsilon}\right),$$

其中

$$R(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p^{m^2 s}\left((p^s-1)(m+1)+p^s\right) - (p^s-1)^2 \sum\limits_{i=2}^{m+1}\binom{m+1}{i} p^{m(m+1-i)s}}{(p^{ms}+1)^{m+1}(p^s-1)^2}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta^{m+1}(ms)}{\zeta^{m+1}(2ms)} R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s = \dfrac{1}{m}$ 有一个$m+1$ 阶极点, 留数为

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\frac{1}{m!}\left((ms-1)^{m+1}\zeta^{m+1}(ms)\frac{R(s)x^s}{\zeta^{m+1}(2ms)s}\right)^{(m)}\\
&= \lim_{s\to 1}\frac{1}{m!}\binom{m}{0}\left((ms-1)^{m+1}\zeta^{m+1}(ms)\right)^{(m)}\frac{R(s)x^s}{\zeta^{m+1}(2ms)s}\\
&\quad + \lim_{s\to 1}\frac{1}{m!}\binom{m}{1}\left((ms-1)^{m+1}\zeta^{m+1}(ms)\right)^{(m-1)}\left(\frac{R(s)x^s}{\zeta^{m+1}(2ms)s}\right)'\\
&\quad + \cdots\cdots\\
&\quad + \lim_{s\to 1}\frac{1}{m!}\binom{m}{m}(ms-1)^{m+1}\zeta^{m+1}(ms)\left(\frac{R(s)x^s}{\zeta^{m+1}(2ms)s}\right)^{(m)}\\
&= \frac{mx^{\frac{1}{m}}}{\zeta^{m+1}(2)} R\left(\frac{1}{m}\right) f(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2m}+\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

其中$f(y)$ 是关于y 的多项式, 次数为k, ϵ 是任意正实数. 因此可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} d(n) = \frac{mx^{\frac{1}{m}}}{\zeta^{m+1}(2)} R(p^{\frac{1}{m}}) f(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2m}+\epsilon}\right),$$

其中

$$R\left(p^{\frac{1}{m}}\right)$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{p^m \left((p^{\frac{1}{m}} - 1)(m+1) + p^{\frac{1}{m}}\right) - (p^{\frac{1}{m}} - 1)^2 \sum_{i=2}^{m+1} \binom{m+1}{i} p^{m+1-i}}{(p+1)^{m+1}(p^{\frac{1}{m}} - 1)^2}\right).$$

这就证明了定理2.7.1.

设整数$k \geq 2$. 定义

$$g(s) = \sum_{n \in C} \frac{d(n)}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
g(s) &= \sum_{n \in C} \frac{d(n)}{n^s} \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{d(p)}{p^s} + \frac{d(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{d(p^l)}{p^{ls}}\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \cdots + \frac{l+1}{p^{ls}}\right) \\
&= \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right) \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots + \frac{1}{p^{ls}} - \frac{l+1}{p^{(l+1)s}}\right) \\
&= \zeta(s) \prod_p \left(\frac{1 - \frac{1}{p^{(l+1)s}}}{1 - \frac{1}{p^s}} - \frac{l+1}{p^{(l+1)s}}\right) \\
&= \frac{\zeta^2(s)}{\zeta((l+1)s)} \prod_p \left(1 - \frac{(l+1)(p^s - 1)}{p^{(l+2)s} - p^s}\right),
\end{aligned}$$

其中$l = \left[\frac{k}{2}\right]$. 再由Perron 公式可证定理2.7.2.

第三章　关于一些Smarandache 函数的无穷级数

本章讨论关于一些Smarandache 函数的Dirichlet 级数的收敛性, 并给出一些恒等式.

§3.1　关于Smarandache 幂函数的无穷级数

设n 为正整数. Smarandache 幂函数$SP(n)$ 是指满足$n \mid m^m$ 的最小正整数m. 即就是

$$SP(n) = \min\left\{ m : n \mid n^m, m \in \mathbb{N}, \prod_{p|n} p = \prod_{p|m} p \right\}.$$

当n 取遍自然数时, 可得Smarandache 幂函数的数列$\{SP(n)\}$ 如下:

$$1, 2, 3, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 11, 6, 13, 14, 15, 4, 17, 6, 19, 10, \cdots$$

根据$SP(n)$ 的定义, 当n 为素数幂时, 有

$$SP(n) = \begin{cases} p, & \text{如果 } 1 \le \alpha \le p; \\ p^2, & \text{如果 } p+1 \le \alpha \le 2p^2; \\ p^3, & \text{如果 } 2p^2+1 \le \alpha \le 3p^3; \\ \cdots\cdots & \\ p^\alpha, & \text{如果 } (\alpha-1)p^\alpha + 1 \le \alpha \le \alpha p^\alpha. \end{cases}$$

设n 的标准素因数分解式为$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. 若对全体$\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 有$\alpha_i \le p_i$, 则有$SP(n) = U(n)$, 其中

$$U(n) = \prod_{p|n} p.$$

显然$SP(n)$ 不是可乘函数. 例如

$$SP(8) = 4, SP(3) = 3, SP(24) = 6 \ne SP(3) \times SP(8).$$

本节研究与$SP(n)$ 有关的一个无穷级数, 并给出一些恒等式.

定理3.1.1. *设s 为复数, 满足$Re\ s>1$, 则有*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{\left(SP(n^k)\right)^s}=\begin{cases}\frac{2^s+1}{2^s-1}\frac{1}{\zeta(s)}, & \text{如果 } k=1,2;\\ \frac{2^s+1}{2^s-1}\frac{1}{\zeta(s)}-\frac{2^s-1}{4^s}, & \text{如果 } k=3;\\ \frac{2^s+1}{2^s-1}\frac{1}{\zeta(s)}-\frac{2^s-1}{4^s}+\frac{3^s-1}{9^s}, & \text{如果 } k=4,5,\end{cases}$$

其中$\mu(n)$ 为Möbius 函数, $\zeta(s)$ 为Riemann zeta 函数.

注意到$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$. 在定理中取$s=2,4$, 可得下面的一些恒等式.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{\left(SP(n^k)\right)^2}=\begin{cases}\frac{10}{\pi^2}, & \text{如果 } k=1,2;\\ \frac{10}{\pi^2}-\frac{3}{16}, & \text{如果 } k=3;\\ \frac{10}{\pi^2}-\frac{3}{16}+\frac{8}{81}, & \text{如果 } k=4,5,\end{cases}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{\left(SP(n^k)\right)^4}=\begin{cases}\frac{102}{\pi^4}, & \text{如果 } k=1,2;\\ \frac{102}{\pi^4}-\frac{15}{256}, & \text{如果 } k=3;\\ \frac{102}{\pi^4}-\frac{15}{256}+\frac{80}{6561}, & \text{如果 } k=4,5.\end{cases}$$

现在证明定理. 注意到当m 为偶数时, $\mu(2m)=0$; 而当m 为奇数时, $\mu(2m)=-\mu(m)$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{\left(SP(n^k)\right)^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^k)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m)}{(SP((2m)^k)^s}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^k)^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP(2^k(2m-1)^k)^s}.\end{aligned}$$

当$k=1$ 或2 时, $\frac{\mu(n)}{SP(n^k)}$ 是可乘函数. 事实上对任意互素的正整数m,n, 当$\mu(mn)=0$时, 有$\mu(m)=0$ 或$\mu(n)=0$, 从而$\mu(m)\mu(n)=0$. 因此

$$\frac{\mu(mn)}{SP(m^kn^k)}=\frac{\mu(m)}{SP(m^k)}\frac{\mu(n)}{SP(n^k)}=\frac{\mu(m)}{m}\frac{\mu(n)}{n}.$$

如果$\mu(mn)\neq 0$, 则有$\mu(m)\neq 0$, $\mu(n)\neq 0$, 从而

$$SP(m^kn^k)=SP(m^k)SP(n^k)=mn.$$

因此当$k=1$ 或2 时,

$$\frac{\mu(n)}{SP(n^k)}=\frac{\mu(n)}{n}$$

是可乘函数.

当$k=1$ 或2 时, 由等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)},$$

以及Euler 乘积可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{(SP(n^k))^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^k))^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP(2^k(2m-1)^k))^s}\\ &= \prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)+\frac{1}{2^s}\prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\\ &= \frac{2^s+1}{2^s}\frac{2^s}{2^s-1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{2^s+1}{2^s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\\ &= \frac{2^s+1}{2^s-1}\frac{1}{\zeta(s)}.\end{aligned}$$

这就证明了定理的第一种情况.

当$k=3$ 时, 注意到$SP(2^3)=4$, 从而有$\dfrac{\mu(1)}{(SP(2^3))^s}=\dfrac{1}{4^s}$, 以及

$$\frac{\mu(2m-1)}{(SP(2^3(2m-1)^3))^s}=\frac{\mu(2m-1)}{2^s(2m-1)^s},\qquad m>1.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{(SP(n^3))^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^3))^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP(2^3(2m-1)^3))^s}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^3))^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{2^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{2^s(2m-1)^s}\\ &= \prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-\frac{2^s-1}{4^s}+\frac{1}{2^s}\prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\\ &= \frac{2^s+1}{2^s}\frac{2^s}{2^s-1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-\frac{2^s-1}{4^s}\\ &= \frac{2^s+1}{2^s-1}\frac{1}{\zeta(s)}-\frac{2^s-1}{4^s}.\end{aligned}$$

这就证明了定理的第二种情况.

当$k=4$ 或5 时, 注意到$SP(2^k)=4$, $SP(3^k)=9$, 从而有

$$\frac{\mu(2)}{(SP(2^k))^s}=\frac{1}{4^s},\qquad \frac{\mu(3)}{(SP(3^k))^s}=-\frac{1}{9^s},$$

$$\frac{\mu(2m-1)}{(SP(2^k(2m-1)^k))^s}=\frac{\mu(2m-1)}{2^s(2m-1)^s},\qquad m>2,$$

以及

$$\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^k))^s}=\frac{\mu(2m-1)}{(2m-1)^s},\qquad m\geq 2.$$

则由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(n)}{\left(SP(n^k)\right)^s}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP((2m-1)^k))^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(SP(2^k(2m-1)^k))^s}\\
&=-\frac{1}{9^s}+\frac{1}{3^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{(2m-1)^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{2^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(2m-1)}{2^s(2m-1)^s}\\
&=-\frac{1}{9^s}+\frac{1}{3^s}+\prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-\frac{2^s-1}{4^s}+\frac{1}{2^s}\prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\\
&=\frac{2^s+1}{2^s}\frac{2^s}{2^s-1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-\frac{2^s-1}{4^s}+\frac{3^s-1}{9^s}\\
&=\frac{2^s+1}{2^s-1}\frac{1}{\zeta(s)}-\frac{2^s-1}{4^s}+\frac{3^s-1}{9^s}.
\end{aligned}$$

从而完成了定理的证明.

§3.2 关于$n^{\frac{1}{m}}$ 的整数部分以及不超过n 的最大m 次幂

设m 为固定的正整数, 并定义函数

$$a_m(n)=\left[n^{\frac{1}{m}}\right],$$

其中$[x]$ 表示不超过x 的最大整数. 例如, $a_2(1)=1$, $a_2(2)=1$, $a_2(3)=1$, $a_2(4)=2$, $a_2(5)=2$, $a_2(6)=2$, $a_2(7)=2$, $a_2(8)=2$, $a_2(9)=3$, $a_2(10)=3,\cdots$.

设n 为正整数, 显然存在唯一的整数k 满足$k^m\leq n<(k+1)^m$. 定义

$$b_m(n)=k^m,$$

即$b_m(n)$ 是不超过n 的最大m 次幂. 例如当$m=2$ 时有$b_2(1)=1$, $b_2(2)=1$, $b_2(3)=1$, $b_2(4)=4$, $b_2(5)=4$, $b_2(6)=4$, $b_2(7)=4$, $b_2(8)=4$, $b_2(9)=9$, $b_2(10)=9,\cdots$.

本节研究关于$a_m(n)$ 与$b_m(n)$ 的两个Dirichlet 级数, 并给出一些等式.

定理3.2.1. 设m 为固定的正整数. 则对任意实数$s>1$, *Dirichlet* 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_m^s(n)}$$

收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_m^s(n)}=\left(\frac{1}{2^{s-1}}-1\right)\zeta(s),$$

其中$\zeta(s)$ 是*Riemann zeta* 函数.

定理3.2.2. 设m 为固定的正整数. 则对任意实数$s>\frac{1}{m}$, *Dirichlet* 级数

$$g_m(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_m^s(n)}$$

收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_m^s(n)}=\left(\frac{1}{2^{ms-1}}-1\right)\zeta(ms).$$

由定理立即可得下面的推论.

推论3.2.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_m^2(n)}=-\frac{1}{12}\pi^2,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_m^3(n)}=-\frac{3}{4}\zeta(3),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_2^2(n)}=-\frac{7}{720}\pi^4,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_2^3(n)}=-\frac{31}{30240}\pi^6,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_3^2(n)}=-\frac{31}{30240}\pi^6,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_3^3(n)}=-\frac{255}{256}\zeta(9).$$

推论3.2.2. 设s,m 为正整数, 且$m\geq 2$. 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_m^s(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{b_s^m(n)}.$$

现在证明这些定理. 对任意正整数n, 显然正好有$(k+1)^m-k^m$ 个整数n 使得$a_m(n)=k$. 从而有

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_m^s(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ a_m(n)=k}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^s}.$$

当k 为奇数时, 有

$$\sum_{\substack{n=1\\ a_m(n)=k}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^s} = \frac{-1}{k^s}.$$

而当k 为偶数时, 则有

$$\sum_{\substack{n=1\\ a_m(n)=k}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^s} = \frac{1}{k^s}.$$

综合这两种情况可得

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{\substack{t=1\\ k=2t}}^{\infty} \frac{1}{(2t)^s} + \sum_{\substack{t=1\\ k=2t-1}}^{\infty} \frac{-1}{(2t-1)^s} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(2t)^s} - \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^s} - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(2t)^s} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{2}{2^s t^s} - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^s}. \end{aligned}$$

显然当$s > 1$ 时$f(s)$ 收敛, 且有

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_m^s(n)} = \left(\frac{1}{2^{s-1}} - 1 \right) \zeta(s).$$

这就证明了定理3.2.1.

利用同样的方法易证

$$\begin{aligned} g_m(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b_m^s(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1\\ b_m(n)=k^m}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^{ms}} \\ &= \sum_{\substack{t=1\\ k=2t}}^{\infty} \frac{1}{(2t)^{ms}} + \sum_{\substack{t=1\\ k=2t-1}}^{\infty} \frac{-1}{(2t-1)^{ms}} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{2}{2^{ms} t^{ms}} - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{ms}}. \end{aligned}$$

显然当$s > \frac{1}{m}$ 时$g(s)$ 收敛, 且有

$$g_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b_m^s(n)} = \left(\frac{1}{2^{ms-1}} - 1 \right) \zeta(ms).$$

从而证明了定理3.2.2.

§3.3 整数的无m 次幂部分

设n,m 为正整数, 且$m \geq 2$. 定义$C_m(n)$ 为n 的无m 次幂部分, 即就是

$$C_m(n) = \min\left\{\frac{n}{d^m} : d^m | n, \quad d \in \mathbb{N}\right\}.$$

设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, 则有$C_m(n_1^m n_2) = C_m(n_2)$, 以及

$$C_m(n) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}, \quad \text{当} \quad \alpha_i \leq m-1.$$

对任意正整数k, 定义函数$\delta_k(n)$ 如下,

$$\delta_k(n) = \begin{cases} \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid n, (d,k) = 1\}, & \text{如果 } n \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } n = 0. \end{cases}$$

设A 表示满足方程$C_m(n) = \delta_k(n)$ 的正整数n 的集合. 即

$$A = \{n \in \mathbb{N} : C_m(n) = \delta_k(n)\}.$$

本节研究与集合A 有关的Dirichlet 级数的收敛性, 并给出一些恒等式.

定理3.3.1. *设$m \geq 2$ 是固定的正整数. 则对任意实数$s > 1$, 有*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)} \prod_{p|k} \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{\left(1 - \frac{1}{p^{ms}}\right)^2},$$

其中$\zeta(s)$ 为Riemann zeta 函数, $\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积.

注意到

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \zeta(6) = \pi^6/945,$$

由定理立即可得下面的一些等式.

推论3.3.1. *定义*

$$\begin{aligned} B &= \{n \in \mathbb{N} : C_2(n) = \delta_k(n)\}, \\ C &= \{n \in \mathbb{N} : C_3(n) = \delta_k(n)\}. \end{aligned}$$

则有

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in B}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{15}{\pi^2} \prod_{p|k} \frac{p^6}{(p^2+1)(p^4-1)}$$

以及

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in C}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{305}{2\pi^4} \prod_{p|k} \frac{p^{10}}{(p^4+p^2+1)(p^6-1)}.$$

现在证明定理. 定义函数$a(n)$ 如下:

$$a(n)=\begin{cases}1, & \text{如果 } n\in A,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对任意实数$s>0$, 显然有

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

注意到当$s>1$ 时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 收敛, 则当$s>1$ 时$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 也收敛.

现在考虑集合A. 由$C_m(n)$ 与$\delta_k(n)$ 的定义可知$C_m(n)$ 与$\delta_k(n)$ 都是可乘函数, 因此求解方程$C_m(n)=\delta_k(n)$, 只需考虑$n=p^\alpha$ 时的情况. 当$n=p^\alpha$, $(p,k)=1$ 时, $C_m(p^\alpha)=\delta_k(p^\alpha)$ 有解当且仅当$1\leq\alpha\leq m-1$. 当$n=p^\alpha$, $p\mid k$ 时, 则$C_m(p^\alpha)=\delta_k(p^\alpha)$ 有解当且仅当$m\mid\alpha$. 由Euler 乘积有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s} &= \prod_{p}\left(1+\frac{a(p)}{p^s}+\frac{a(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{a(p^{m-1})}{p^{(m-1)s}}+\cdots\right)\\ &= \prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{a(p)}{p^s}+\frac{a(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{a(p^{m-1})}{p^{(m-1)s}}\right)\\ &\quad\times\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{a(p)}{p^{ms}}+\frac{a(p^2)}{p^{2ms}}+\frac{a(p^3)}{p^{3ms}}+\cdots\right)\\ &= \prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{(m-1)s}}\right)\\ &\quad\times\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{1}{p^{ms}}+\frac{1}{p^{2ms}}+\frac{1}{p^{3ms}}+\cdots\right)\\ &= \frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}\prod_{p\mid k}\frac{1-\frac{1}{p^s}}{\left(1-\frac{1}{p^{ms}}\right)^2},\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod\limits_{p}$ 表示对所有素数求乘积. 由此完成了定理的证明.

§3.4 关于k 次补数的无穷级数

设n,k 为正整数, 且$k\geq 2$. $a_k(n)$ 称为n 的k 次补数, 如果$a_k(n)$ 是使得$na_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 特别地, 分别称$a_2(n),a_3(n),a_4(n)$ 为平凡补数, 立方补

数, 四次补数. 本节研究Dirichlet 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_k(n))^s}$$

的性质, 并给出几个恒等式.

定理3.4.1. *设s 为复数, 满足$Re\ s \geq 1$. 则有*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^s}=\frac{\zeta^2(2s)}{\zeta(4s)},$$

其中$\zeta(s)$ 为Riemann zeta 函数.

定理3.4.2. *设s 为复数, 满足$Re\ s \geq 1$. 则有*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_3(n))^s}=\frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{3s}+1}\right),$$

其中$\prod_p$ 为表示对所有素数求乘积.

定理3.4.3. *设s 为复数, 满足$Re\ s \geq 1$. 则有*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_4(n))^s}=\frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)\left(1+\frac{1}{p^{4s}+2}\right).$$

在上述定理中分别取$s=1,2$, 并注意到

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},$$
$$\zeta(12)=\frac{691\pi^{12}}{638512875},\quad \zeta(16)=\frac{3617\pi^{16}}{325641566250},$$

从而可得下面的一些等式.

推论3.4.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_2(n)}=\frac{5}{2};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_3(n)}=\frac{\zeta^2(3)}{\zeta(6)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^3+1}\right);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_4(n)}=\frac{7}{6}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^4+1}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^4+2}\right).$$

推论3.4.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^2}=\frac{7}{6};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_3(n))^2}=\frac{715}{691}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^6+1}\right);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_4(n))^2}=\frac{7293}{7234}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^8+1}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^8+2}\right).$$

现在证明定理. 对任意正整数n, 设$n = l^2m$, 其中m 为无平方因子数, 则由$a_2(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^s} &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{(l^2mm)^s}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{l^{2s}m^{2s}}\\ &= \zeta(2s)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{2s}}\right)=\frac{\zeta^2(2s)}{\zeta(4s)},\end{aligned}$$

其中$\mu(n)$ 为Möbius 函数. 这就证明了定理3.4.1.

对任意正整数n, 设$n = l^3m^2r$, 其中$(m,r) = 1$, rm 是无平凡因子数, 则由$a_3(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_3(n))^s} &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{r=1\\(m,r)=1}}^{\infty}\frac{|\mu(m)||\mu(r)|}{(l^3m^2rmr^2)^s}\\ &= \zeta(3s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{3s}}\sum_{\substack{r=1\\(m,r)=1}}^{\infty}\frac{|\mu(r)|}{r^{3s}}\\ &= \zeta(3s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{3s}}\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{p^{3s}}\right)\\ &= \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{3s}}\prod_{p|m}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^{3s}}\right)}\\ &= \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{3s}\left(1+\frac{1}{p^{3s}}\right)}\right)\\ &= \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)}\prod_p\left(1+\frac{1}{\frac{1}{p^{3s}+\frac{1}{p^{3s}}}}\right).\end{aligned}$$

这就证明了定理3.4.2.

对任意正整数n, 设$n=l^4m^3r^2t$, 其中$(m,r)=1$, $(mr,t)=1$, mrt 是无平凡因子数, 则由$a_4(n)$ 的定义有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_4(n))^s}\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=1\\(m,r)=1\\(mr,t)=1}}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)||\mu(r)||\mu(t)|}{(l^4m^3r^2tmr^2t^3)^s}\\
&=\zeta(4s)\sum_{\substack{m=1\\(m,r)=1}}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)||\mu(r)|}{m^{4s}r^{4s}}\sum_{\substack{t=1\\(mr,t)=1}}^{\infty}\frac{|\mu(t)|}{t^{4s}}\\
&=\frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{\substack{m=1\\(m,r)=1}}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)||\mu(r)|}{m^{4s}r^{4s}}\prod_{p|mr}\frac{1}{1+\frac{1}{p^{4s}}}\\
&=\frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{\substack{m=1\\(m,r)=1}}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)||\mu(r)|}{m^{4s}r^{4s}}\prod_{p|m}\frac{1}{1+\frac{1}{p^{4s}}}\prod_{p|r}\frac{1}{1+\frac{1}{p^{4s}}}\\
&=\frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{4s}}\prod_{p|m}\frac{1}{1+\frac{1}{p^{4s}}}\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)\\
&=\frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{4s}}\prod_{p|m}\frac{1}{1+\frac{1}{p^{4s}}}\frac{\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)}{\prod\limits_{p|m}\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)}\\
&=\frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)\left(1+\frac{1}{p^{4s}+2}\right).
\end{aligned}
$$

这就证明了定理3.4.3.

§3.5 关于k 次补数的一些恒等式

设n,k 为正整数, 且$k\geq 2$. $a_k(n)$ 称为n 的k 次补数. 如果$a_k(n)$ 是使得$na_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 本节研究与$a_k(n)$ 有关的Dirichlet 级数, 并给出一些恒等式.

定理3.5.1. *设α,β 为复数, 满足$Re\ \alpha\geq 1$, $Re\ \beta\geq 1$. 则有*

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}a_k^{\beta}(n)}=\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right),
$$

其中$\zeta(\alpha)$ 是*Riemann zeta* 函数, $\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积.

定理3.5.2. 设α, β 为复数, 满足$Re\ \alpha \geq 1$, $Re\ \beta \geq 1$. 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} a_k^{\beta}(n)} = \left(1 - \frac{2(2^{k\alpha}-1)(2^{\alpha+(k+1)\beta}-1)}{2^{(k+1)\alpha+(k-1)\beta} - 2^{\alpha-(k-1)^2\beta}}\right) \zeta(k\alpha) \times \prod_p \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta} - 1}\right).$$

注意到

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad 以及 \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

由上述定理立即可得下面的一些恒等式.

推论3.5.1. 在上述定理中取$\alpha = \beta$, $k = 2$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(na_2(n))^{\alpha}} = \frac{\zeta^2(2\alpha)}{\zeta(4\alpha)};$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{(na_2(n))^{\alpha}} = \frac{\zeta^2(2\alpha)}{\zeta(4\alpha)} \cdot \frac{4^{\alpha}-1}{4^{\alpha}+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(na_2(n))^{\alpha}} = \frac{\zeta^2(2\alpha)}{\zeta(4\alpha)} \cdot \frac{3-4^{\alpha}}{1+4^{\alpha}}.$$

推论3.5.2. 在推论*3.5.1* 中取$\alpha = \beta = 1$ 或$\alpha = \beta = 2$, $k = 2$, 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_2(n)} = \frac{5}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(na_2(n))^2} = \frac{7}{6};$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{na_2(n)} = \frac{3}{2}, \qquad \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{(na_2(n))^2} = \frac{35}{34};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na_2(n)} = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(na_2(n))^2} = -\frac{91}{102}.$$

现在证明定理. 对任意正整数n, 设$n = m^k l$, 其中l 为无k 次因子数, 则由$a_k(n)$ 的定义有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} a_k^{\beta}(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{d^k | l} \mu(d)}{m^{k\alpha} l^{\alpha} l^{(k-1)\beta}} = \zeta(k\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{d^k | l} \mu(d)}{l^{\alpha+(k-1)\beta}}$$

$$= \zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{\alpha+(k-1)\beta}}+\frac{1}{p^{2(\alpha+(k-1)\beta)}}+\cdots+\frac{1}{p^{(k-1)(\alpha+(k-1)\beta)}}\right)$$

$$= \zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{\alpha+(k-1)\beta}}\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)(\alpha+(k-1)\beta)}}}{1-\dfrac{1}{p^{\alpha+(k-1)\beta}}}\right)$$

$$= \zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right),$$

其中$\mu(n)$ 为Möbius 函数. 这就证明了定理3.5.1.

另一方面, 不难证明

$$\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha a_k^\beta(n)} = \sum_{\substack{m=1\\2\nmid m^k l}}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|l}\mu(d)}{m^{k\alpha}l^\alpha l^{(k-1)}} = \sum_{\substack{m=1\\2\nmid m}}^{\infty}\frac{1}{m^{k\alpha}}\sum_{\substack{l=1\\2\nmid l}}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|l}\mu(d)}{l^{\alpha+(k-1)}}$$

$$= \frac{2^{k\alpha}-1}{2^{k\alpha}}\frac{\zeta(k\alpha)(2^{\alpha+(k-1)\beta}-1)}{2^{\alpha+(k-1)\beta}-2^{(k-1)(\alpha+(k-1)\beta)}}\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right)$$

$$= \frac{\zeta(k\alpha)(2^{k^\alpha}-1)2^{\alpha+(k-1)\beta}}{2^{(k+1)\alpha+(k-1)\beta}-2^{\alpha-(k-1)^2\beta}}\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

再由定理3.5.1 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha a_k^\beta(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha a_k^\beta(n)} - 2\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha a_k^\beta(n)}$$

$$= \left(1-\frac{2(2^{k^\alpha}-1)(2^{\alpha+(k-1)\beta}-1)}{2^{(k+1)\alpha+(k-1)\beta}-2^{(k-1)^2\beta-\alpha}}\right)\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

从而证明了定理3.5.2.

§3.6 关于两个函数的Dirichlet 级数

对任意正整数n, 定义函数$Z_*(n)$ 和$Z(n)$ 如下:

$$Z_*(n) = \max\left\{m \in \mathbb{N} : \frac{m(m+1)}{2} \leq n\right\},$$

以及

$$Z(n) = \min\left\{m \in \mathbb{N} : n \leq \frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

即就是说, $Z_*(n)$ 表示满足

$$\frac{m(m+1)}{2} \leq n$$

的最大正整数m, $Z(n)$ 表示满足

$$n \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数m.

例如, $Z_*(1) = 1$, $Z_*(2) = 1$, $Z_*(3) = 2$, $Z_*(4) = 2$, $Z_*(5) = 2$, $Z_*(6) = 3$, $Z_*(7) = 3$, $Z_*(8) = 3$, $Z_*(9) = 3, \cdots$, $Z(1) = 1$, $Z(2) = 2$, $Z(3) = 2$, $Z(4) = 3$, $Z(5) = 3$, $Z(6) = 3$, $Z(7) = 4$, $Z(8) = 4$, $Z(9) = 4$, $Z(10) = 4$, $\cdots$.

本节研究与$Z_*(n)$ 和$Z(n)$ 有关的Dirichlet 级数的收敛性, 并给出一些恒等式.

定理3.6.1. *对任意复数s, 无穷级数*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(Z_*(n))^s}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(Z(n))^s},$$

当$s > 0$ 时收敛, 而当$s \leq 0$ 时发散.

定理3.6.2. *设s 为复数, 满足$Re\ s > 2$, 则有*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(Z_*(n))^s} = \zeta(s-1) + \zeta(s)$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(Z(n))^s} = \zeta(s-1),$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

定理3.6.3. 设n 为正整数, s 为复数, 且$Re\ s>1$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z_*(n))^s}=\frac{2}{4^s}\zeta(s)-\frac{1}{2^s}\zeta(s)$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z(n))^s}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)-\frac{2}{4^s}\zeta\left(s,\frac{1}{4}\right),$$

其中$\zeta(s,\alpha)$ 为*Hurwitz zeta* 函数.

由定理3.6.3 可得下面的推论.

推论3.6.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z_*(n))^2}=-\frac{\pi^2}{16}.$$

现在证明定理. 假设

$$\frac{m(m+1)}{2}\le n<\frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

则$Z_*(n)=m$ 共有

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}=m+1$$

个解, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z_*(n))^s}=\sum_{\substack{n=1\\ Z_*(n)=m}}^{\infty}\frac{(-1)^n(m+1)}{m^s}.$$

当m 为奇数时, 上面的项都抵消了. 而当m 为偶数时, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z_*(n))^s} &= -\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)^s}+\cdots\\ &= -\frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\right).\end{aligned}$$

同理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z(n))^s}=-\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n-1)^s}+\cdots.$$

从而证明了定理3.6.1.

假设

$$\frac{m(m+1)}{2}\le n<\frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

则$Z_*(n)=m$ 共有

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}=m+1$$

个解, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Z_*(n))^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m+1}{m^s}=\zeta(s-1)+\zeta(s).$$

利用同样的方法可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Z(n))^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{m(m+1)}{2}-\frac{(m-1)m}{2}}{m^s}=\zeta(s-1).$$

这就证明了定理3.6.2.

接下来证明定理3.6.3. 同理易证

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z_*(n))^s} &= -\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)^s}+\cdots\\ &= -\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{10^s}+\cdots+\frac{1}{(4n-2)^s}+\cdots\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{8^s}+\cdots+\frac{1}{(4n)^s}+\cdots\right)\\ &= -\frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^s}+\cdots\right)\\ &\quad+\frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{(2n)^s}+\cdots\right)\\ &= \frac{2}{4^s}\zeta(s)-\frac{1}{2^s}\zeta(s),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Z(n))^s} &= -\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n-1)^s}+\cdots\\ &= \left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^s}+\cdots\right)\\ &\quad-2\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)^s}+\cdots\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)-\frac{2}{4^s}\zeta\left(s,\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

从而可得定理3.6.3.

§3.7 与Euler 函数有关的一个方程

对任意正整数$n \geq 1$, Euler 函数$\phi(n)$ 是指不超过n 且与n 互素的正整数的数目. 此外定义$J(n)$ 为模n 的原特征的数目, 并令A 表示满足方程

$$\phi^2(n) = nJ(n)$$

的正整数n 的集合.

本节研究与A 有关的Dirichlet 级数的收敛性, 并给出一些恒等式.

定理3.7.1. *对任意实数$s > \frac{1}{2}$, 有*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)},$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

取$s = 1$ 与2, 并注意到

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(4) = \pi^4/90,$$
$$\zeta(6) = \pi^6/945, \quad \zeta(12) = 691\pi^{12}/638512875,$$

立即可得下面的等式:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{315}{2\pi^4}\zeta(3) \qquad \text{以及} \qquad \sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{15015}{1382}\frac{1}{\pi^2}.$$

现在证明定理. 注意到$\phi(n)$ 与$J(n)$ 都是可乘函数. 此处当$n = p^\alpha$ 时, 有

$$J(p) = p - 1, \quad \phi(p) = p - 1, \quad J(p^\alpha) = p^{\alpha-2}(p-1)^2$$

以及$\phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$. 则可分三种情况考虑方程$\phi^2(n) = nJ(n)$ 的解.

(a) 显然$n = 1$ 是方程的解.

(b) 当$n > 1$ 时, 设$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 且$\alpha_i \geq 2 (i = 1, 2, \cdots, k)$. 则有

$$J(n) = p_1^{\alpha_1-2}(p_1-1)^2 \cdots p_k^{\alpha_k-2}(p_k-1)^2$$

以及

$$\phi^2(n) = \left(p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\right)^2.$$

在这种情况下, n 也是方程的解.

(c) 设$n = p_1p_2\cdots p_r p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r, \quad \alpha_j > 1, \quad j = r+1, r+2, \cdots, k,$$

则$\phi^2(n) = nJ(n)$ 当且仅当

$$\phi^2(p_1p_2\cdots p_r) = p_1p_2\cdots p_r J(p_1p_2\cdots p_r)$$

或者

$$(p_1-1)^2(p_2-1)^2\cdots(p_r-1)^2 = p_1p_2\cdots p_r(p_1-2)(p_2-2)\cdots(p_r-2).$$

显然p_r 不能整除$(p_1-1)^2(p_2-1)^2\cdots(p_r-1)^2$. 则在该情形下方程$\phi^2(n) = nJ(n)$ 无解.

综合以上情况可得, 方程$\phi^2(n) = nJ(n)$ 成立当且仅当$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$, 其中$\alpha_i > 1$, 或者$n = 1$, 即$A$ 是1 以及所有Square-full 数的集合.

定义函数$a(n)$ 如下:

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n \in A, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

对任意实数$s > 0$, 显然有

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

注意到当$s > 1$ 时$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 收敛, 则由Euler 乘积可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1 \\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \frac{a(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}\right) \\
&= \prod_p \frac{p^{2s} - p^s + 1}{p^{2s} - p^s} = \prod_p \frac{p^{3s} + 1}{p^s(p^{2s} - 1)} \\
&= \prod_p \frac{p^{6s} - 1}{p^s(p^{2s} - 1)(p^{3s} - 1)} = \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^{6s}}}{(1 - \frac{1}{p^{2s}})(1 - \frac{1}{p^{3s}})} \\
&= \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)},
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积. 这就证明了定理3.7.1.

§3.8 一类Dirichlet 级数及其恒等式

设n,m 为正整数, 且$m\geq 2$. n 的m 次补数$b_m(n)$ 是指使得$nb_m(n)$ 为m 次幂的最小正整数. 对任意正整数k, 定义函数$\delta_k(n)$ 如下:

$$\delta_k(n)=\begin{cases}\max\{d\in\mathbb{N}:d\mid n,(d,k)=1\}, & \text{如果 } n\leq 0,\\ 0, & \text{如果 } n=0.\end{cases}$$

设A 表示满足方程$\delta_k(n)=b_m(n)$ 的所有正整数n 的集合. 本节研究与集合A 有关的Dirichlet 级数的收敛性, 并给出一些恒等式.

定理3.8.1. *设m 为正偶数. 则对任意实数$s>1$ 以及正整数k, 有*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta\left(\frac{m}{2}s\right)}{\zeta(ms)}\prod_{p\mid k}\frac{p^{\frac{3}{2}ms}}{(p^{ms}-1)\left(p^{\frac{1}{2}ms}-1\right)},$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod\limits_{p}$ 表示对所有素数求乘积.

由定理立即可得下面的推论.

推论3.8.1. *定义$B=\{n:n\in\mathbb{N},\delta_k(n)=b_2(n)\}$. 则有*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in B}}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{15}{\pi^2}\prod_{p\mid k}\frac{p^6}{(p^4-1)(p^2-1)}.$$

推论3.8.2. *定义$C=\{n:n\in\mathbb{N},\delta_k(n)=b_4(n)\}$. 则有*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in C}}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{\substack{n=1\\ n\in B}}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{105}{\pi^4}\prod_{p\mid k}\frac{p^{12}}{(p^8-1)(p^4-1)}.$$

推论3.8.3. *定义$C=\{n:n\in\mathbb{N},\delta_k(n)=b_4(n)\}$. 则有*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in C}}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{675675}{691}\frac{1}{\pi^6}\prod_{p\mid k}\frac{p^{18}}{(p^{12}-1)(p^6-1)}.$$

现在证明定理. 对任意实数$s>0$, 显然有

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

由于当$s>1$ 时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 收敛, 则当$s>1$ 时$\sum_{\substack{n=1\\n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 也收敛. 现在考虑集合A. 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$. 由$\delta_k(n)$ 与$b_m(n)$ 的定义可知$\delta_k(n)$ 与$b_m(n)$ 都是可乘函数. 则只需考虑$n=p^\alpha$ 的情形.

假设$n=p^\alpha$ 且$(p,k)=1$, 则有$\delta_k(p^\alpha)=p^\alpha$, 以及

$$b_m(p^\alpha)=\begin{cases} p^{m-\alpha}, & \text{如果 } 1\le\alpha\le m;\\ p^{m+m[\frac{\alpha}{m}]-\alpha}, & \text{如果 } \alpha>m \quad \text{且} \quad \alpha\neq rm;\\ 1, & \text{如果 } \alpha=rm,\end{cases}$$

其中r 是任意正整数, $[x]$ 表示不超过x 的最大的整数. 则$\delta_k(p^\alpha)=b_m(p^\alpha)$ 当且仅当$\alpha=\dfrac{m}{2}$.

假设$n=p^\alpha$ 且$(p,k)\neq 1$, 则$\delta_k(p^\alpha)=1$. 从而方程$\delta_k(p^\alpha)=b_m(p^\alpha)$ 有解当且仅当$n=p^{rm}$, $r=0,1,2,\cdots$.

现在由Euler 乘积公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s} &= \prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{m}{2}s}}\right)\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{1}{p^{ms}}+\frac{1}{p^{2ms}}+\frac{1}{p^{3ms}}+\cdots\right)\\ &= \prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{m}{2}s}}\right)\prod_{p\mid k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ms}}}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{m}{2}s}}\right)^{-1}\\ &= \frac{\zeta(\frac{m}{2}s)}{\zeta(ms)}\prod_{p\mid k}\frac{p^{\frac{3}{2}ms}}{(p^{ms-1})(p^{\frac{1}{2}ms}+1)},\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod_{p}$ 表示对所有素数求乘积. 这就证明了定理3.8.1.

§3.9 p 次原数列

设p 为固定的素数, n 为正整数. p 次原数列$S_p(n)$ 的定义为:

$$S_p(n)=\min\{m: m\in\mathbb{N}, p^n\mid m!\}.$$

此外定义

$$S(n)=\min\{m: m\in\mathbb{N}, n\mid m!\}.$$

容易证明$S(p)=p$ 以及$S(n)<n$ (除去$n=4$ 以及$n=p$ 的情形). 从而有

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right],$$

其中$\pi(x)$ 表示1 到x 之间的素数的个数, $[x]$ 表示不超过x 的最大整数.

本节研究与$S_p(n)$ 有关的Dirichlet 级数, 并给出一些恒等式与渐近公式.

定理3.9.1. *对任意素数p 以及复数$s(Re\ s > 1)$, 有*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_p^s(n)} = \frac{\zeta(s)}{p^s - 1},$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

特别地, 取$s = 2, 4$, $p = 2, 3, 5$, 可得

推论3.9.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_2^2(n)} = \frac{\pi^2}{18}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_3^2(n)} = \frac{\pi^2}{48}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_5^2(n)} = \frac{\pi^2}{144};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_2^4(n)} = \frac{\pi^4}{1350}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_3^4(n)} = \frac{\pi^4}{7200}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_5^4(n)} = \frac{\pi^4}{56160}.$$

定理3.9.2. *设p 为固定的素数. 则对于任意实数$x \geq 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ S_p(n) \leq x}}^{\infty} \frac{1}{S_p(n)} = \frac{1}{p-1}\left(\ln x + \gamma + \frac{p \ln p}{p-1}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中γ 是Euler 常数, ϵ 为任意正实数.

定理3.9.3. *设k 为任意的正整数. 则对于任意素数p 以及实数$x \geq 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ S_p(n) \leq x}}^{\infty} S_p^k(n) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)(p-1)} + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

现在证明定理. 设$m = S_p(n)$. 若$p^\alpha \parallel m$, 则在数列$S_p(n)$ 中m 会重复α 次. 从而有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_p^s(n)} &= \sum_{\substack{m=1 \\ p^\alpha \| m}}^{\infty} \frac{\alpha}{m^s} = \sum_{p^\alpha} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,p)=1}}^{\infty} \frac{\alpha}{p^{\alpha s} m^s} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\alpha}{p^{\alpha s}} \zeta(s) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\alpha}{p^{\alpha s}}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\alpha}{p^{\alpha s}}=\frac{1}{p^s}+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^{(\alpha+1)s}}$$
$$=\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^s}\left(\frac{1}{p^s-1}\right)=\frac{1}{p^s-1},$$

可得恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(n)}=\frac{\zeta(s)}{p^s-1}.$$

这就证明了定理3.9.1.

设$x\geq 1$ 为任意实数, 不难证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leq x}}^{\infty}\frac{x^s}{S_p^{s-k}(n)s}\mathrm{d}s$$
$$=\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leq x}}^{\infty}S_p^k(n)+O\left(\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leq x}}^{\infty}\frac{x^b}{S_p^{b-k}(n)}\min\left(1,\frac{1}{T\ln(\frac{x}{S_p(n)})}\right)\right),$$

以及

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)>x}}^{\infty}\frac{x^s}{S_p^{s-k}(n)s}\mathrm{d}s$$
$$=O\left(\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leq x}}^{\infty}\frac{x^b}{S_p^{b-k}(n)}\min\left(1,\frac{1}{T\ln(\frac{x}{S_p(n)})}\right)\right),$$

其中k 为任意整数. 综合上述两式有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^s}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^{s-k}(n)}\mathrm{d}s$$
$$=\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leq x}}^{\infty}S_p^k(n)+O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^b}{S_p^{b-k}(n)}\min\left(1,\frac{1}{T\ln(\frac{x}{S_p(n)})}\right)\right).$$

再由定理3.9.1 可得

$$\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leq x}}^{\infty}S_p^k(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta(s-k)x^s}{(p^{s-k}-1)s}\mathrm{d}s$$

$$+O\left(x^b\min\left(1,\frac{1}{T\ln(\frac{x}{S_p(n)})}\right)\right).$$

当$k=-1$ 时, 取$b=\frac{1}{2}$, $T=x$, 并把积分线从$\frac{1}{2}\pm iT$ 移到$-\frac{1}{2}\pm iT$. 此时函数

$$\frac{\zeta(s+1)x^s}{(p^{s+1}-1)s}$$

在$s=0$ 有一个二阶极点, 留数为

$$\frac{1}{p-1}\left(\ln x+\gamma-\frac{p\ln p}{p-1}\right).$$

因此有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}\frac{\zeta(s+1)x^s}{(p^{s+1}-1)s}\mathrm{d}s=\frac{1}{p-1}\left(\ln x+\gamma-\frac{p\ln p}{p-1}\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{1}{2}-iT}^{-\frac{1}{2}-iT}+\int_{-\frac{1}{2}-iT}^{-\frac{1}{2}+iT}+\int_{-\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\right)\frac{\zeta(s+1)x^s}{(p^{s+1}-1)s}\mathrm{d}s.$$

不难证明估计式

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{1}{2}-iT}^{-\frac{1}{2}-iT}+\int_{-\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\right)\frac{\zeta(s+1)x^s}{(p^{s+1}-1)s}\mathrm{d}s\right|$$
$$\ll\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\zeta(\sigma+1+iT)x^{1/2}}{(p^{\sigma+1+iT}-1)T}\right|\mathrm{d}\sigma$$
$$\ll\frac{x^{\frac{1}{2}}}{T}=x^{-1/2},$$

以及

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-iT}^{-\frac{1}{2}+iT}\frac{\zeta(s+1)x^s}{(p^{s+1}-1)s}\mathrm{d}s\right| \ll \int_0^T\left|\frac{\zeta(1/2+iT)x^{-1/2}}{(p^{1/2+iT}-1)(1/2+t)}\right|\mathrm{d}t$$
$$\ll x^{-1/2+\epsilon}.$$

从而有

$$\sum_{\substack{n=1\\S_p(n)\le x}}^{\infty}\frac{1}{S_p(n)}=\frac{1}{p-1}\left(\ln x+\gamma+\frac{p\ln p}{p-1}\right)+O\left(x^{-1/2+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理3.9.2.

当$k\ge 1$ 时, 取$b=k+\frac{3}{2}$ 以及$T=x$, 并把积分线从$s=k+\frac{3}{2}$ 移到$s=k+\frac{1}{2}$. 此时函数

$$\frac{\zeta(s-k)x^s}{(p^{s-k}-1)s}$$

在$s=k+1$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{x^{k+1}}{(p-1)(k+1)}.$$

利用同样的方法可得

$$\sum_{\substack{n=1\\S_p(n)\le x}}^{\infty} S_p^k(n)=\frac{x^{k+1}}{(p-1)(k+1)}+O(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

从而证明了定理3.9.3.

§3.10 第49 个Smarandache 问题

对任意素数p 以及正整数n, 设$S_p(n)$ 为使得$S_p(n)!$ 被p^n 整除的最小正整数. 例如, $S_3(1)=3$, $S_3(2)=6$, $S_3(3)=9$, $S_3(4)=9$, $S_3(5)=12$, $S_3(6)=15$, $S_3(7)=18$, $\cdots$.

本节研究与$S_p(n)$ 有关的Dirichlet 级数的收敛性, 并给出一些等式.

定理3.10.1. *对任意实数s, 有*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_p(n)}{n^s}=(p-1)\zeta(s-1)+R_1(s,p),\quad s>2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)S_p(n)}{n^s}=\frac{(p-1)\zeta(s-2)}{\zeta(s-1)}+R_2(s,p),\quad s>3,$$

其中

$$R_1(s,p)\ \le\ \frac{p-1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n+\log p}{n^s},$$
$$R_2(s,p)\ \le\ \frac{p-1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)(\log n+\log p)}{n^s}.$$

首先引入一个引理.

引理3.10.1. *对任意素数p 以及正整数n, 有*

$$n(p-1)\le S_p(n)\le\left(n+\frac{\log(np)}{\log 2}\right)(p-1).$$

证明. 不难证明

$$S_p(n)!=\prod_{p_1\le S_p(n)}p_1^{\alpha(p_1)},\quad \alpha(p_1)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{S_p(n)}{p_1^m}\right],$$

其中$\prod\limits_{p_1\le x}$ 表示对不超过x 的素数求乘积. 注意到$p^n \mid S_p(n)$, 可得

$$n \le \alpha(p) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{S_p(n)}{p^m}\right] \le \sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_p(n)}{p^m} = \frac{S_p(n)}{p-1}.$$

另一方面, 由$p \mid S_p(n)$ 可得$p^n \nmid (S_p(n)-1)!$. 因此

$$\begin{aligned} n-1 &\ge \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{S_p(n)-1}{p^m}\right] \\ &\ge \sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_p(n)-1}{p^m} - \sum_{\substack{m=1 \\ p^m\le S_p(n)-1}}^{\infty} 1 \\ &\ge \frac{S_p(n)-1}{p-1} - \frac{\log(np)}{\log 2}. \end{aligned}$$

从而有

$$S_p(n) \le \left(n-1+\frac{\log(np)}{\log 2}\right)(p-1)+1 \le \left(n+\frac{\log(np)}{\log 2}\right)(p-1).$$

这就证明了引理. □

现在证明定理. 由引理3.10.1 可得

$$S_p(n) = n(p-1) + O((p-1)(\log n + \log p)),$$

从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_p(n)}{n^s} = (p-1)\zeta(s-1) + R_1(s,p), \quad s>2,$$

其中

$$R_1(s,p) \le \frac{p-1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n + \log p}{n^s}.$$

类似可证定理3.10.1 的其余公式.

§3.11 伪Smarandache 无平方因子函数

对任意正整数n, 伪Smarandache 无平方因子函数$ZW(n)$ 是指满足$n \mid m^n$ 的最小正整数m. 显然$ZW(1)=1$. 当$n>1$ 时, 则有

$$ZW(n) = p_1 p_2 \cdots p_k,$$

其中p_1, p_2, $\cdots$, p_k 是n 的不同素因子.

本节研究$ZW(n)$ 的均值, 并给出一些恒等式与渐近公式.

定理3.11.1. *设α, s 为实数, 满足$s-\alpha>1$ 以及$\alpha>0$. 则有*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right],$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积.

定理3.11.2. *对任意实数$\alpha>0$ 以及$x\geq 1$, 有*

$$\sum_{n\leq x}ZW^{\alpha}(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

注意到

$$\sum_{n\leq x}ZW^{0}(n)=x+O(1)\quad 以及\quad \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\alpha\zeta(\alpha+1)=1,$$

由定理3.11.2 立即可得极限

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right)=\zeta(2).$$

现在证明定理. 设α, s 为实数, 满足$s-\alpha>1$ 与$\alpha>0$. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p\left[1+\frac{p^{\alpha}}{p^s}+\frac{p^{\alpha}}{p^{2s}}+\cdots\right]=\prod_p\left[1+\frac{\frac{1}{p^{s-\alpha}}}{1-\frac{1}{p^s}}\right]\\ &= \prod_p\left[\left(\frac{1+\frac{1}{p^{s-\alpha}}}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right)\right]\\ &= \frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right]. \end{aligned}$$

这就证明了定理3.11.1.

对任意实数$\alpha>0$ 以及$x\geq 1$, 显然有

$$|ZW^{\alpha}(n)|\leq n^{\alpha}\quad 以及\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^{\sigma}}\right|<\frac{1}{\sigma-\alpha},$$

其中σ 是s 的实部. 在Perron 公式中取

$$s_0=0,\ b=\alpha+\frac{3}{2},\ T>2,$$

则有

$$\sum_{n\leq x} ZW^{\alpha}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+\frac{3}{2}-iT}^{\alpha+\frac{3}{2}+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{3}{2}}}{T}\right).$$

注意到函数

$$f(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=\alpha+1$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right].$$

取$T=x$, 可得

$$\sum_{n\leq x} ZW^{\alpha}(n) = \frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right] + O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理3.11.2.

第四章　除数函数与Smarandache 函数的混合均值

本章利用解析方法, 研究数论中著名的Dirichlet 除数函数与一些Smarandache 函数的混合均值, 并给出一些渐近公式.

§4.1　关于平方补数的一个渐近公式

设n 为正整数. $S(n)$ 称为n 的平方补数, 如果$S(n)$ 是使得$nS(n)$ 为完全平方数的最小正整数. 本节研究除数函数在该数列上的渐近性质.

定理4.1.1. *对任意实数$x \geq 3$, 有*

$$\sum_{n\leq x} d(S(n)) = c_1 x\ln x + c_2 x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中$d(n)$ 是除数函数, ϵ 是任意正实数,

$$c_1 = \frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right),$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \\ &\quad \times\left(\sum_p \frac{2(2p+1)\ln p}{(p-1)(p+1)(p+2)} + 2\gamma - 1\right), \end{aligned}$$

此外$\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积, $\sum\limits_p$ 表示对所有素数求和, γ 为Euler 常数.

为了证明定理, 首先引入下面的引理.

引理4.1.1. *对任意实数$y \geq 3$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\leq y} d(n)|\mu(n)| = c_1' y\ln y + c_2' y + O\left(y^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中$\mu(n)$ 是Möbius 函数, 常数c_1' 与c_2' 的定义如下:

$$c_1' = \frac{36}{\pi^4}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right),$$

$$c_2' = \frac{36}{\pi^4}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \times\left(\sum_p\frac{2\ln p}{(p+1)(p+2)}+\sum_p\frac{4\ln p}{p^2-1}+2\gamma-1\right).$$

证明. 设

$$T=\sqrt{y},\qquad A(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{(p^s+1)^2}\right).$$

则由Perron 公式有

$$\sum_{n\leq y}d(n)|\mu(n)|=\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\epsilon-iT}^{1+\epsilon+iT}\frac{\zeta^2(s)}{\zeta^2(2s)}A(s)\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(y^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中$\mu(n)$ 是Möbius 函数, ϵ 是任意正实数.

注意到函数

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta^2(2s)}A(s)\frac{y^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个二阶极点, 留数为

$$\mathrm{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta^2(2s)}A(s)\frac{y^s}{s}\right)=c_1'y\ln y+c_2'y,$$

其中

$$c_1'=\frac{36}{\pi^4}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right),$$

$$c_2' = \frac{36}{\pi^4}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \times\left(\sum_p\frac{2\ln p}{(p+1)(p+2)}+\sum_p\frac{4\ln p}{p^2-1}+2\gamma-1\right).$$

从而有

$$\sum_{n\leq y}d(n)|\mu(n)|=c_1'y\ln y+c_2'y+O(y^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

这就证明了引理4.1.1. □

现在证明定理. 由引理4.1.1 有

$$\sum_{d\leq x}d(S(n)) = \sum_{ak^2\leq x}d(S(ak^2))=\sum_{ak^2\leq x}d(a)|\mu(a)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{a\le\frac{x}{k^2}} d(a)|\mu(a)| \\
&= \sum_{k\le\sqrt{x}}\left(c_1'\frac{x}{k^2}\ln\frac{x}{k^2}+c_2'\frac{x}{k^2}+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{k^{1+2\epsilon}}\right)\right) \\
&= c_1'\zeta(2)x\ln x+\left(c_2'\zeta(2)+2c_1'\zeta'(2)\right)x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).
\end{aligned}
$$

定义

$$
c_1=c_1'\zeta(2)=\frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right)
$$

以及

$$
\begin{aligned}
c_2 &= c_2'\zeta(2)+2c_1'\zeta'(2)=c_2'\zeta(2)-2c_1'\zeta(2)\sum_p\frac{\ln p}{p^2-1} \\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right)\left(\sum_p\frac{2(2p+1)\ln p}{(p-1)(p+1)(p+2)}+2\gamma-1\right).
\end{aligned}
$$

由上可得

$$
\sum_{n\le x} d(S(n))=c_1x\ln x+c_2x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).
$$

这就证明了定理4.1.1.

§4.2 三次幂剩余数与k 次补数

设自然数$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 则

$$
a_3(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}
$$

称为3 次幂剩余数, 其中

$$
\beta_i=\min(2,\alpha_i),\qquad 1\le i\le r.
$$

设$k\ge 2$ 是固定的整数, 如果$b_k(n)$ 是使得$nb_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数, 就称$b_k(n)$ 为n 的k 次补数. 本节利用解析方法研究数列$a_3(n)b_k(n)$ 的渐近性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.2.1. 对任意实数$x\ge 1$, 有

$$
\sum_{n\le x} a_3(n)b_k(n)=\frac{6x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}R(k+1)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}\right),
$$

其中ϵ 是任意正实数. 此外当$k=2$ 时,

$$R(k+1)=\prod_p\left(1+\frac{p^3+p}{p^7+p^6-p-1}\right).$$

而当$k\geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}&R(k+1)\\&=\prod_p\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+3}}{(p+1)p^{(k+1)j}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+3}}{(p+1)\left(p^{(k+1)(k+j)}-p^{(k+1)j}\right)}\right).\end{aligned}$$

定理4.2.2. 设$\phi(n)$ 为*Euler* 函数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\phi(a_3(n)b_k(n))=\frac{6x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}R^*(k+1)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

其中当$k=2$ 时,

$$\begin{aligned}&R^*(k+1)\\&=\prod_p\left(1+\frac{p^2+1}{p^6+2p^5+2p^4+2p^3+2p^2+2p+1}-\frac{1}{p^2+p}\right).\end{aligned}$$

而当$k\geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}R^*(k+1)\ &=\ \prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+3}-p^{k-j+2}}{(p+1)p^{(k+1)j}}\right.\\&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+3}-p^{k-j+2}}{(p+1)\left(p^{(k+1)(k+j)}-p^{(k+1)j}\right)}\right).\end{aligned}$$

定理4.2.3. 设$\alpha>0$, $\sigma_\alpha(n)=\sum\limits_{d|n}d^\alpha$. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(a_3(n)b_k(n))=\frac{6x^{k\alpha+1}}{(k\alpha+1)\pi^2}R(k\alpha+1)+O\left(x^{k\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

其中当$k=2$ 时,

$$\begin{aligned}&R(k\alpha+1)\\&=\prod_p\left(1+\frac{p}{p+1}\left(\frac{p^\alpha+1}{p^{2\alpha+1}}+\frac{(p^{3\alpha+1}-1)p^{2\alpha+1}+p^{4\alpha}-1}{(p^{3(2\alpha+1)}-p^{2\alpha+1})(p^\alpha-1)}\right)\right).\end{aligned}$$

而当$k\geq 3$ 时,

$$R(k\alpha+1)\ =\ \prod_p\left(1+\frac{p^{k\alpha+1}-p}{(p+1)(p^\alpha-1)p^{k\alpha+1}}\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{(k-j+3)\alpha+1}-p}{(p+1)(p^{\alpha}-1)p^{(k\alpha+1)j}}$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{(k-j+3)\alpha+1}-p}{(p+1)(p^{\alpha}-1)\left(p^{(k+j)(k\alpha+1)j}-p^{(k\alpha+1)j}\right)}\right).$$

定理4.2.4. 设$d(n)$ 为*Dirichlet* 除数函数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}d(a_3(n)b_k(n))=\frac{6x}{\pi^2}R(1)f(\log x)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中$f(y)$ 是关于y 的多项式, 次数为k. 此外当$k=2$ 时,

$$R(1)=\prod_{p}\left(1+\frac{p^3}{(p+1)^3}\left(\frac{3p+4}{p^3+p}-\frac{3}{p^2}-\frac{1}{p^3}\right)\right).$$

而当$k\geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}R(1)&=\prod_{p}\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{\left(k-j+3-\binom{k+1}{j}\right)p^{k-j+1}}{(p+1)^{k+1}}\right.\\&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{k-j+3}{(p+1)^{k+1}(p^{j-1}-p^{j-k-1})}-\frac{1}{(p+1)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_3(n)b_k(n)}{n^s}.$$

由Euler 乘积可得, 当$k=2$ 时有

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_{p}\left(1+\frac{a_3(p)b_k(p)}{p^s}+\frac{a_3(p^2)b_k(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{s-2}}+p^2\left(\frac{1}{p^{2s}}+\frac{p}{p^{3s}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-2s}}\right)\right)\\&=\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}\prod_{p}\left(1+\frac{p^s+p}{(p^{s-2}+1)(p^{2s}-1)}\right).\end{aligned}$$

而当$k\geq 3$ 时有

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_{p}\left(1+\frac{a_3(p)b_k(p)}{p^s}+\frac{a_3(p^2)b_k(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{s-k}}+p^2\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j}}{p^{js}}+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ks}}}\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+2}}{p^{(k+j)s}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_p \left(1+\frac{1}{p^{s-k}}\right) \\
&\quad \times \left(1+\frac{p^{s-k}}{1+p^{s-k}}\left(\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+2}}{p^{js}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+2}}{p^{(k+j)s}-p^{js}}\right)\right) \\
&= \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))} \\
&\quad \times \prod_p \left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)p^{js}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right).
\end{aligned}$$

显然有不等式

$$|a_m(n)b_k(n)| \le n^2, \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m(n)b_k(n)}{n^{\sigma}}\right| < \frac{1}{\sigma-k-1},$$

其中$\sigma > k+1$ 是s 的实部. 则由Perron 公式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{a_m(n)b_k(n)}{n^{s_0}} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \\
&\quad +O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) \\
&\quad +O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right) \\
&\quad +O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{||x||}\right)\right),
\end{aligned}$$

其中N 是最靠近x 的整数, $||x|| = |x-N|$. 取$s_0 = 0$, $b = k+2$, $T = x^{3/2}$, $H(x) = x^2$, $B(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma-k-1}$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} a_m(n)b_k(n) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{k+2-iT}^{k+2+iT}\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \\
&\quad +O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$R(s) = \begin{cases}
\prod_p \left(1+\dfrac{p^s+p}{(p^{s-2}+1)(p^{2s}-1)}\right), \\
\qquad \text{如果} k=2; \\
\prod_p \left(1+\sum_{j=2}^{k}\dfrac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)p^{js}}+\sum_{j=1}^{k}\dfrac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right), \\
\qquad \text{如果} k\ge 3.
\end{cases}$$

接下来估计主项

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{k+2-iT}^{k+2+iT}\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

把积分线从$s=k+2\pm iT$ 移到$s=k+1/2\pm iT$. 此时函数

$$\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)$$

在$s=k+1$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(2)}R(k+1).$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{k+2-iT}^{k+2+iT}+\int_{k+2+iT}^{k+1/2+iT}+\int_{k+1/2+iT}^{k+1/2-iT}+\int_{k+1/2-iT}^{k+2-iT}\right)\\&\qquad\times\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(2)}R(k+1).\end{aligned}$$

不难得到估计式

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{k+2+iT}^{k+1/2+iT}+\int_{k+1/2-iT}^{k+2-iT}\right)\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)\mathrm{d}s\right|\\&\ll\int_{k+1/2}^{k+2}\left|\frac{\zeta(\sigma-k+iT)}{\zeta(2(\sigma-k+iT))}R(\sigma-k+iT)\frac{x^2}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\\&\ll\frac{x^{k+2}}{T}=x^{k+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{k+1/2+iT}^{k+1/2-iT}\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)\mathrm{d}s\right|\\&\ll\int_1^T\left|\frac{\zeta(1/2+it)x^{k+1/2}}{\zeta(1+2it)t}\mathrm{d}t\right|\\&\ll x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}.\end{aligned}$$

注意到$\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 由上可得

$$\sum_{n\le x}a_3(n)b_k(n)=\frac{6x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}R(k+1)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

从而证明了定理4.2.1.

定义

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(a_3(n)b_k(n))}{n^s},\\ f_2(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(a_3(n)b_k(n))}{n^s},\\ f_3(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(a_3(n)b_k(n))}{n^s}.\end{aligned}$$

由Euler 乘积公式以及$\phi(n)$, $\sigma_\alpha(n)$, $d(n)$ 的定义可得, 当$k=2$ 时有

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\phi(a_3(p)b_k(p))}{p^s}+\frac{\phi(a_3(p^2)b_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{p^2-p}{p^s}+\left(\frac{p^2-p}{p^{2s}}+\frac{p^3-p^2}{p^{3s}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-2s}}\right)\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{p^{s-2}}-\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{(p^2-p)(p^s+p)}{p^{3s}-p^s}\right)\\ &= \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(2(s-2))}\prod_p\left(1+\frac{p^{s-2}}{p^{s-2}+1}\left(\frac{(p^2-p)(p^s+p)}{p^{3s}-p^s}-\frac{1}{p^{s-1}}\right)\right).\end{aligned}$$

而当$k\geq 3$ 时有

$$\begin{aligned} f_1(s) = &\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-k}}-\frac{1}{p^{s-k+1}}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+2}-p^{k-j+1}}{p^{js}}\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+2}-p^{k-j+1}}{p^{(k+j)s}-p^{js}}\right)\\ = &\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s-k+1}+p}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{s-j+2}-p^{s-j+1}}{(p^{s-k}+1)p^{js}}\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{s-j+2}-p^{s-j+1}}{(p^{s-k}+1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right).\end{aligned}$$

另外当$k=2$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_2(s) = &\frac{\zeta(s-2\alpha)}{\zeta(2(s-2\alpha))}\\ &\times\prod_p\left(1+\frac{p^{s-2\alpha}}{p^{s-2\alpha}+1}\left(\frac{p^\alpha+1}{p^s}+\frac{(p^{3\alpha}-1)p^s+p^{4\alpha}-1}{(p^{3s}-p^s)(p^\alpha-1)}\right)\right).\end{aligned}$$

而当$k \geq 3$ 时有

$$f_2(s) = \frac{\zeta(s-k\alpha)}{\zeta(2(s-k\alpha))}\prod_p\left(1+\frac{p^s-p^{s-k\alpha}}{(p^{s-k\alpha}+1)(p^\alpha-1)p^s}\right.$$
$$+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{(3-j)\alpha+s}-p^{s-k\alpha}}{(p^{s-k\alpha}+1)(p^\alpha-1)p^{js}}$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{(3-j)\alpha+s}-p^{s-k\alpha}}{(p^{s-k\alpha}+1)(p^\alpha-1)(p^{(j+j)s}-p^{js})}\right).$$

此外当$k=2$ 时, 有

$$f_3(s) = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta^3(2s)}\prod_p\left(1+\frac{p^{3s}}{(p^s+1)^3}\left(\frac{3p^s+4}{p^{3s}+p^s}-\frac{3}{p^{2s}}-\frac{1}{p^{3s}}\right)\right).$$

而当$k \geq 3$ 时有

$$f_3(s) = \frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^{k+1}(2s)}\prod_p\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{\left(k-j+3-\binom{k+1}{j}\right)p^{(k-j+1)s}}{(p^s+1)^{k+1}}\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{k-j+3}{(p^s+1)^{k+1}(p^{(j-1)s}-p^{(j-k-1)s})}-\frac{1}{(p^s+1)^{k+1}}\right).$$

再由Perron 公式以及证明定理4.2.1 的方法可得其他定理.

§4.3 关于可加k 次补数

对于任意正整数n, n 的k 次补数$b_k(n)$ 是指使得$nb_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 类似可定义可加k 次补数$a_k(n)$. 如果$a_k(n)$ 是使得$a_k(n)+n$ 为k 次幂的最小非负整数, 则$a_k(n)$ 称为n 的可加k 次补数. 例如, 当$k=2$ 时, 可得

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$a_2(n)=$	0	2	1	0	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	$\cdots$

本节研究$a_k(n)$ 与$d(a_k(n))$ 的均值性质, 并给出几个渐近公式.

定理4.3.1. 对任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n\leq x} a_k(n) = \frac{k^2}{4k-2}x^{2-\frac{1}{k}} + O(x^{2-\frac{2}{k}}).$$

定理4.3.2. 对任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(a_k(n)) = \left(1-\frac{1}{k}\right)x\ln x + \left(2\gamma+\ln k-2+\frac{1}{k}\right)x$$

$$+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right),$$

其中γ 是*Euler* 常数.

为了证明定理, 先引入下面的两个引理.

引理4.3.1. 对于任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/2}),$$

其中γ 为*Euler* 常数.

证明. 参见文献[1]. □

引理4.3.2. 设$x \geq 3$ 为实数, $f(n)$ 为非负数论函数, 满足$f(0) = 0$. 则有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} f(a_k(n)) = \sum_{t=1}^{[x^{\frac{1}{k}}]-1} \sum_{n\leq g(t)} f(n) + O\left(\sum_{n\leq g([x^{1/k}])} f(n)\right),$$

其中$[x]$ 表示不超过x 的最大整数, 以及

$$g(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{i}{k} t^i.$$

证明. 对任意实数$x \geq 1$, 设正整数M 满足

$$M^k \leq x < (M+1)^k.$$

注意到当n 取遍区间$[t^k, (t+1)^k)$ 的整数时, $a_k(n)$ 也取遍区间$[0, (t+1)^k - t^k - 1]$ 的整数, 并且$f(0) = 0$. 从而有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} f(a_k(n)) &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{t^k\leq n<(t+1)^k} f(a_k(n)) + \sum_{M^k\leq n\leq x} f(a_k(n))\\ &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{n\leq g(t)} f(n) + \sum_{g(M)+M^k-x\leq n<g(M)} f(n),\end{aligned}$$

其中

$$g(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{i}{k} t^i.$$

由于$M=\left[x^{\frac{1}{k}}\right]$, 则可得

$$\sum_{n\le x} f(a_k(n)) = \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \sum_{n\le g(t)} f(n) + O\left(\sum_{n\le g([x^{1/k}])} f(n)\right).$$

这就证明了引理4.3.2. □

现在证明定理. 由引理4.3.1 以及Euler 求和公式, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} a_k(n) &= \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \sum_{n\le g(t)} n + O\left(\sum_{n\le g([x^{1/k}])} n\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} k^2t^{2k-2} + O(x^{2-2/k})\\ &= \frac{k^2}{4k-2}x^{2-1/k} + O(x^{2-2/k}).\end{aligned}$$

这就证明了定理4.3.1.

另一方面, 由引理4.3.1 与引理4.3.2, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x} d(a_k(n))\\ =& \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \sum_{n\le g(t)} d(n) + O\left(\sum_{n\le g([x^{1/k}])} d(n)\right)\\ =& \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \left(kt^{k-1}\left(\ln kt^{k-1} + \ln\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)\right.\\ &\left.+(2\gamma-1)kt^{k-1}\right) + O(x^{1-1/k}\ln x)\\ =& \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \big(k(k-1)t^{k-1}\ln t + (2\gamma+\ln k-1)kt^{k-1}\\ &+O(t^{k-2})\big) + O(x^{1-1/k}\ln x)\\ =& k(k-1)\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} t^{k-1}\ln t + (2\gamma+\ln k-1)k\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} t^{k-1}\\ &+O(x^{1-1/k}\ln x).\end{aligned}$$

再由Euler 求和公式, 不难证明

$$\sum_{n\le x} d(a_k(n)) = \left(1-\frac{1}{k}\right)x\ln x + \left(2\gamma+\ln k-2+\frac{1}{k}\right)x$$

$$+O\left(x^{1-1/k}\ln x\right).$$

从而证明了定理4.3.2.

§4.4 关于第29 个Smarandache 问题

对任意正整数n, $a_k(n)$ 称为n 的k 次补数, 如果$a_k(n)$ 是使得$na_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$, 则$a_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_m^{\beta_m}$, 其中$\alpha_i+\beta_i\equiv 0(\bmod k)$ 且$\beta_i<k$, $i=1,2,\cdots,m$.

本节利用解析方法研究该数列的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.4.1. 对任意实数$x>1$, 有

$$\sum_{n\le x}\frac{d(a_k(n))}{\phi(a_k(n))}=kx^{\frac{1}{k}}g(k)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),$$

其中

$$\begin{aligned} g(k) &= \prod_p\left[1+\frac{k}{p^{\frac{1}{k}+k-2}(p-1)}+\frac{k-1}{p^{\frac{2}{k}+k-3}(p-1)}\right.\\ &\left.\quad +\cdots+\frac{2}{p^{\frac{k-1}{k}}(p-1)}\right], \end{aligned}$$

$d(n)$ 为*Dirichlet* 除数函数, $\phi(n)$ 为*Euler* 函数, ϵ 是任意正实数.

特别地, 取$k=2$, 可得推论.

推论4.4.1. 对任意实数$x>1$, 有

$$\sum_{n\le x}\frac{d(a_2(n))}{\phi(a_2(n))}=2x^{\frac{1}{2}}\prod_p\left(1+\frac{2}{\sqrt{p}(p-1)}\right)+O\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right).$$

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(a_k(n))}{\phi(a_k(n))n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(a_k(n))}{\phi(a_k(n))n^s}\\ &= \prod_p\left(1+\frac{d(a_k(p))}{\phi(a_k(p))p^s}+\frac{d(a_k(p^2))}{\phi(a_k(p^2))p^{2s}}+\cdots\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad +\frac{d(a_k(p^k))}{\phi(a_k(p^k))p^{ks}}+\frac{d(a_k(p^{k+1}))}{\phi(a_k(p^{k+1}))p^{(k+1)s}}+\cdots\Bigg)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{d(p^{k-1})}{\phi(p^{k-1})p^s}+\frac{d(p^{k-2})}{\phi(p^{k-2})p^{2s}}+\cdots\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{p^{ks}}+\frac{d(p^{k-1})}{\phi(p^{k-1})p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left[\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ks}}}+\frac{d(p^{k-1})}{\phi(p^{k-1})p^s\left(1-\frac{1}{p^{ks}}\right)}+\cdots\right.\\
&\qquad \left.+\frac{d(p)}{\phi(p)p^{(k-1)s}\left(1-\frac{1}{p^{ks}}\right)}\right]\\
&= \zeta(ks)\prod_p\left[1+\frac{d(p^{k-1})}{\phi(p^{k-1})p^s}+\frac{d(p^{k-2})}{\phi(p^{k-2})p^{2s}}+\cdots+\frac{d(p)}{\phi(p)p^{(k-1)s}}\right]\\
&= \zeta(ks)\prod_p\left[1+\frac{k}{p^{k-2}(p-1)p^s}+\frac{k-1}{p^{k-3}(p-1)p^{2s}}+\cdots\right.\\
&\qquad \left.+\frac{2}{(p-1)p^{(k-1)s}}\right],
\end{aligned}
$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数. 取$b=\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{\log x}$, $T=x^{\frac{1}{2k}}$, 则由Perron 公式可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{d(a_k(n))}{\phi(a_k(n))} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^b}{T}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}\log x}{T}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).
\end{aligned}
$$

再取$a=\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{\log x}$, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{b+iT}+\int_{b+iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{b-iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\
&=\mathrm{Res}\left[f(s)\frac{x^s}{s},\frac{1}{k}\right]\\
&=kx^{\frac{1}{k}}\prod_p\left[1+\frac{k}{p^{1/k+k-2}(p-1)}+\frac{k-1}{p^{2/k+k-3}(p-1)}\right.\\
&\qquad \left.+\cdots+\frac{2}{p^{(k-1)/k}(p-1)}\right].
\end{aligned}
$$

注意到估计式

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\right| \ll x^{\frac{1}{2k}+\epsilon};$$
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{b-iT} f(s)\frac{x^s}{s}\right| \ll \frac{x^{\frac{1}{k}+\epsilon}}{T} \ll x^{\frac{1}{2k}+\epsilon};$$
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\right| \ll \frac{x^{\frac{1}{k}+\epsilon}}{T} \ll x^{\frac{1}{2k}+\epsilon},$$

则有

$$\sum_{n\le x}\frac{d(a_k(n))}{\phi(a_k(n))} = kx^{\frac{1}{k}} \times\prod_p\left[1+\frac{k}{p^{1/k+k-2}(p-1)}+\frac{k-1}{p^{2/k+k-3}(p-1)}+\cdots+\frac{2}{p^{(k-1)/k}(p-1)}\right] +O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理4.4.1.

§4.5 关于k 次补数序列

对任意正整数$n\ge 2$, 设$b_k(n)$ 表示n 的k 次补数, 即$b_k(n)$ 是使得$nb_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 本节利用解析方法研究k 次补数的性质, 并给出n 个渐近公式.

定理4.5.1. *设$d(n)$ 为Dirichlet 除数函数. 则对任意实数$x\ge 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\le x} d(nb_k(n)) = x(A_0\ln^k x + A_1\ln^{k-1}x+\cdots+A_k)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中$A_0, A_1,\cdots,A_k$ 是可计算的常数, ϵ 是任意正实数.

由定理立即可得推论.

推论4.5.1. *设$a(n)$ 为平方补数. 则对任意实数$x\ge 1$, 有*

$$\sum_{n\le x} d(na(n)) = x(A\ln^2 x + B\ln x + C)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中A, B, C 是可计算的常数.

推论4.5.2. *设$b(n)$ 为立方补数. 则对任意实数$x\ge 1$, 有*

$$\sum_{n\le x} d(nb(n)) = x(B_1\ln^3 x + C_1\ln^2 x + D_1\ln x + E_1)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中B_1, C_1, D_1, E_1 是可计算的常数.

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(nb_k(n))}{n^s}.$$

由$b_k(n)$ 的定义, 除数函数的性质以及Euler 乘积公式, 可得

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{d(pb_k(p))}{p^s}+\frac{d(p^2b_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{d(b_k(p))}{p^s}+\cdots+\frac{d(p^k)}{p^{ks}}+\frac{d(p^{2k})}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{d(p^{2k})}{p^{2ks}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{k+1}{p^s}+\cdots+\frac{k+1}{p^{ks}}+\frac{2k+1}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{2k+1}{p^{2ks}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ks}}}\times\frac{1}{p^s}\times\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\times\left(1+\frac{k}{1-\frac{1}{p^{ks}}}\right)\right)\\
&= \zeta(s)\prod_p\left(1+\frac{k}{p^s}+\frac{k}{p^s(p^{ks}-1)}\right)\\
&= \frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^k(2s)}\prod_p\left(1+\frac{kp^{ks}}{p^s(p^s+1)^k(p^{ks}-1)}-\sum_{2\le i\le k}\frac{\binom{k}{i}p^{ks}}{p^{si}(p^s+1)^k}\right),
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

显然有估计式

$$|d(nb_k(n))|\le n,\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(nb_k(n))}{n^\sigma}\right|\le\frac{1}{\sigma-1},$$

其中σ 是s 的实部. 在Perron 公式中取$s_0=0$, $b=\dfrac{3}{2}$, $T=x$, $H(x)=x$, $B(\sigma)=\dfrac{1}{\sigma-1}$, 则有

$$\sum_{n\le x}d(nb_k(n))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^k(2s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中

$$R(s)=\prod_p\left(1+\frac{kp^{ks}}{p^s(p^s+1)^k(p^{ks}-1)}-\sum_{2\le i\le k}\frac{\binom{k}{i}p^{ks}}{p^{si}(p^s+1)^k}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^k(2s)}R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个$k+1$ 阶极点, 留数为

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\frac{1}{k!}\left((s-1)^{k+1}\zeta^{k+1}(s)\frac{R(s)x^s}{\zeta^k(2s)s}\right)^{(k)}\\
&=\lim_{s\to 1}\frac{1}{k!}\left(\binom{k}{0}((s-1)^{k+1}\zeta^{k+1}(s))^{(k)}\frac{R(s)x^s}{\zeta^k(2s)s}\right.\\
&\qquad+\binom{k}{1}((s-1)^{k+1}\zeta^{k+1}(s))^{(k-1)}\left(\frac{R(s)x^s}{\zeta^k(2s)s}\right)'\\
&\qquad+\cdots\cdots\\
&\qquad\left.+\binom{k}{k}(s-1)^{k+1}\zeta^{k+1}(s)\left(\frac{R(s)x^s}{\zeta^k(2s)s}\right)^{(k)}\right)\\
&=x(A_0\ln^k x+A_1\ln^{k-1}x+\cdots+A_k),
\end{aligned}$$

其中$A_0, A_1, \cdots, A_k$ 是可计算的常数. 因此可得

$$\sum_{n\le x} d(nb_k(n)) = x(A_0\ln^k x + A_1\ln^{k-1}x+\cdots+A_k) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就完成了定理4.5.1 的证明.

§4.6 k 次补数与一个数论函数

对任意正整数n, 设$D(n)$ 表示方程$n=n_1n_2$ 且$(n_1,n_2)=1$ 的解的个数, 即就是

$$D(n)=\sum_{\substack{d\mid n\\ (d,\frac{n}{d})=1}} 1.$$

显然$D(n)$ 是可乘函数. 另一方面, k 次补数$A_k(n)$ 是指使得$nA_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数.

本节利用解析方法研究数论函数$D(n)$ 在集合$\{A_k(n)\}$ 上的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.6.1. 对任意实数$x\ge 1$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} D(A_k(n)) \;=\; &\frac{6\zeta(k)x\ln x}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{2}{p^k+p^{k-1}}\right)+C(k)x\\
&+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

其中$C(k)$ 是可计算的常数, $\zeta(k)$ 是*Riemann zeta* 函数, ϵ 是任意正实数, $\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积.

由定理立即可得推论.

推论4.6.1. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{n \leq x} D(A_4(n)) = \frac{\pi^2}{15} x \ln x \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^4 + p^3}\right) + C(4)x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

为了证明定理, 先引入下面的引理.

引理4.6.1. 对任意正整数$n \geq 1$, 有

$$D(n) = 2^{\upsilon(n)},$$

其中$\upsilon(n)$ 表示n 的不同素因子的个数, 例如

$$\upsilon(n) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n = 1, \\ k, & \text{如果 } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}. \end{cases}$$

证明. 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. 注意到$D(n)$ 是可乘函数, 以及$D(p^\alpha) = 2$, 从而可得

$$D(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d, \frac{n}{d})=1}} 1 = C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k = 2^{\upsilon(n)}.$$

引理证毕. □

现在证明定理. 定义

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(A_k(n))}{n^s}.$$

显然对Re $s > 1$, $f(s)$ 收敛. 则由引理4.6.1 与Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{D(A_k(p))}{p^s} + \frac{D(A_k(p^2))}{p^{2s}} + \cdots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{D(p^{k-1})}{p^s} + \frac{D(p^{k-2})}{p^{2s}} + \cdots + \frac{D(1)}{p^{ks}} + \cdots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{2^{\upsilon(p^{k-1})}}{p^s} + \frac{2^{\upsilon(p^{k-2})}}{p^{2s}} + \cdots + \frac{2^{\upsilon(1)}}{p^{ks}} + \cdots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{2}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{ks}} + \frac{2}{p^{(k+1)s}} + \cdots\right) \\ &= \zeta(s)\zeta(ks) \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} - \frac{2}{p^{ks}}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)} \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^{ks} + p^{(k-1)s}}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

在Perron 公式中取$s_0 = 0, b = 2, T = \frac{3}{2}$, 有

$$\sum_{n\le x} D(A_k(n)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)} R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中

$$R(s) = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^{ks} + p^{(k-1)s}}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)} R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s = 1$ 有一个二阶极点, 留数为

$$\frac{\zeta(k)}{\zeta(2)} x\ln x \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^k + p^{k-1}}\right) + C(k)x,$$

其中$C(k)$ 是可计算的常数. 由此可得

$$\sum_{n\le x} D(A_k(n)) = \frac{6\zeta(k)x\ln x}{\pi^2} \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^k + p^{k-1}}\right) + C(k)x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

从而证明了定理4.6.1.

§4.7 除数函数与可加补数

对任意正整数n, 平方补数$a_2(n)$ 是指使得$na_2(n)$ 为完全平方数的最小正整数. 例如, $a_2(1) = 1$, $a_2(2) = 2$, $a_2(3) = 3$, $a_2(4) = 1$, $a_2(5) = 5$, $a_2(6) = 6$, $a_2(7) = 7$, $a_2(8) = 2$, $\cdots$. 类似可定义可加平方补数. 对任意正整数n, n 的可加平方补数$a(n)$ 是指使得$n + a(n)$ 为完全平方数的最小非负整数, 即

$$a(n) = \min\{k : n + k = m^2, \quad k \ge 0, m \in \mathbb{N}^+\}.$$

例如, $a(1) = 0$, $a(2) = 2$, $a(3) = 1$, $a(4) = 0$, $a(5) = 4$, $\cdots$. 本节利用解析方法研究除数函数在该数列上的某种均值

$$\sum_{n\le x} d(n + a(n)),$$

并给出一个渐近公式.

定理4.7.1. 对任意实数$x \geq 2$, 有

$$\sum_{n \leq x} d(n+a(n)) = \frac{3}{4\pi^2} x \ln^2 x + A_1 x \ln x + A_2 x + O(x^{\frac{3}{4}+\epsilon}),$$

其中A_1, A_2 是可计算的常数, ϵ 是任意正实数.

为了证明定理, 首先引入下面的引理.

引理4.7.1. 对任意实数$x > 1$, 有

$$\sum_{n \leq x} d(n^2) = \frac{3}{\pi^2} x \ln^2 x + B_1 x \ln x + B_2 x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中B_1, B_2 是可计算的常数, ϵ 是任意正实数.

证明. 设$s = \sigma + it$ 为复数, 并定义

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s}.$$

注意到$d(n^2) \ll n^\epsilon$, 则当Re $s > 1$ 时$f(s)$ 收敛. 由Euler 乘积公式可得

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{d(p^2)}{p^s} + \frac{d(p^4)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{d(p^{2n})}{p^{ns}} + \cdots\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{3}{p^s} + \frac{5}{p^{2s}} + \cdots + \frac{2n+1}{p^{ns}} + \cdots\right) \\
&= \zeta^2(s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \\
&= \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数. 再由Perron 公式可得

$$\sum_{n \leq x} d(n^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}+\epsilon}}{T}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s}$$

在$s = 1$ 有一个三阶极点, 留数为

$$\frac{3}{\pi^2} x \ln^2 x + B_1 x \ln x + B_2 x,$$

其中B_1, B_2 是可计算的常数. 因此有

$$\sum_{n\leq x} d(n^2) = \frac{3}{\pi^2} x \ln^2 x + B_1 x \ln x + B_2 x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了引理4.7.1. □

现在证明定理. 对任意实数$x \geq 2$, 设正整数M 满足

$$M^2 \leq x < (M+1)^2.$$

则由$a(n)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x} d(n+a(n)) \\
&= \sum_{1\leq m\leq M-1} \left(\sum_{m^2\leq n<(m+1)^2} d(n+a(n)) \right) + \sum_{M^2\leq n\leq x} d(n+a(n)) \\
&= \sum_{1\leq m\leq M} \left(\sum_{m^2\leq n<(m+1)^2} d(n+a(n)) \right) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \\
&= \sum_{1\leq m\leq M} \left(\sum_{m^2\leq n<(m+1)^2} d((m+1)^2) \right) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \\
&= \sum_{1\leq m\leq M} 2md((m+1)^2) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \\
&= 2\sum_{1\leq m\leq M} md(m^2) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).
\end{aligned}$$

设$A(x) = \sum\limits_{n\leq x} d(n^2)$, 则由Abel 等式与引理4.7.1 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq m\leq M} md(m^2) \\
&= MA(M) - \int_1^M A(t)d(t) + O(M^{1+\epsilon}) \\
&= M\left(\frac{3}{\pi^2} M\ln^2 M + B_1 M\ln M + B_2 M\right) \\
&\qquad - \int_1^M \left(\frac{3}{\pi^2} t\ln^2 t + B_1 t\ln t + B_2 t\right) \mathrm{d}t + O\left(M^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\pi^2}\cdot M^2\ln^2 M + C_1 M^2\ln M + C_2 M^2 + O(M^{\frac{3}{2}+\epsilon}),
\end{aligned}$$

其中C_1, C_2 是可计算的常数.

注意到

$$0 \le x - M^2 \ll \sqrt{x}, \qquad \ln^2 x = 4\ln^2 M + O\left(x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

由上可得

$$\sum_{n\le x} d(n + a(n)) = \frac{3}{4\pi^2} x \ln^2 x + A_1 x \ln x + A_2 x + O\left(x^{\frac{3}{4}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理4.7.1.

§4.8 关于第80 个Smarandache 问题

F. Smarandache 建议研究平方根序列,

$$0,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,$$
$$5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,$$
$$7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,8,8,\cdots.$$

定义上面的数列为$a(n)$, 显然

$$a(n) = [\sqrt{n}],$$

其中$[x]$ 表示不超过x 的最大整数.

本节研究一些数论函数在平方根数列上的均值, 并给出一些渐近公式.

定理4.8.1. 设$a(n) = [\sqrt{n}]$, $d(n)$ 为除数函数, 则有

$$\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{n\le x} d([\sqrt{n}]) = \frac{1}{2} x \log x + \left(2c - \frac{1}{2}\right) x + O(x^{\frac{3}{4}}),$$

其中c 为*Euler* 常数.

证明. 不难得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{n\le x} d([\sqrt{n}]) \\
&= \sum_{1^2\le i<2^2} d([\sqrt{i}]) + \sum_{2^2\le i<3^2} d([\sqrt{i}]) + \cdots \\
&\quad + \sum_{N^2\le i<(N+1)^2} d([\sqrt{i}]) + O(N^\epsilon) \\
&= 3d(1) + 5d(2) + \cdots + [(N+1)^2 - N^2]d(N) + O(N^\epsilon)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j\leq N}(2j+1)d(j) + O(N^{\epsilon}).$$

设

$$A(N) = \sum_{j\leq N} d(j) = N\log N + (2c-1)N + O(N^{\frac{1}{2}}),$$

以及$f(j) = 2j+1$. 由Abel 等式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\leq N}(2j+1)d(j) = A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[N\log N + (2c-1)N + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right)\right](2N+1) - A(1)f(1) \\
&\quad - \int_1^N \left[t\log t - (2c-1)t + O(N^{\frac{1}{2}})\right] 2\mathrm{d}t \\
&= 2N^2\log N + 2(2c-1)N^2 + O\left(N^{\frac{3}{2}}\right) - 2\int_1^N t\log t\mathrm{d}t \\
&\quad -2\int_1^N (2c-1)t\mathrm{d}t - 2\int_1^N O\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2N^2\log N - 2(2c-1)N^2 + O\left(N^{\frac{3}{2}}\right) - N^2\log N^2 + \frac{1}{2}N^2 \\
&\quad -2(2c-1)N^2 + O\left(N^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= N^2\log N + \left(2c - \frac{1}{2}\right)N^2 + O\left(N^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\leq N} d(a(n)) = \sum_{j\leq N}(2j+1)d(j) + O(N^{\epsilon}) \\
&= N^2\log N + \left(2c - \frac{1}{2}\right)N^2 + O(N^{\frac{3}{2}}) + O(N^{\epsilon}) \\
&= \frac{1}{2}x\log x + \left(2c - \frac{1}{2}\right)x + O(x^{\frac{3}{4}}).
\end{aligned}$$

□

定理4.8.2. 设$a(n) = [n^{\frac{1}{3}}]$, $d(n)$ 为除数函数, 则有

$$\sum_{n\leq x} d(a(n)) = \sum_{n\leq x} d([n^{\frac{1}{3}}]) = \frac{1}{3}x\log x + \left(2c - \frac{1}{3}\right)x + O(x^{\frac{5}{6}}),$$

其中c 为*Euler* 函数.

证明. 容易得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{n\le x} d([n^{\frac{1}{3}}]) \\
&= \sum_{1^3\le i<2^3} d([i^{\frac{1}{3}}]) + \sum_{2^3\le i<3^3} d([i^{\frac{1}{3}}]) + \cdots + \sum_{N^3\le i\le x<(N+1)^3} d([i^{\frac{1}{3}}]) \\
&\quad +O\left(N^{\epsilon}\right) \\
&= 7d(1) + 19d(2) + \cdots + [(N+1)^3 - N^3]d(N) + O\left(N^{\epsilon}\right) \\
&= \sum_{j\le N} (3j^2+3j+1)d(j) + O\left(N^{\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

设

$$A(N) = \sum_{j\le N} d(j) = N\log N + (2c-1)N + O(N^{\frac{1}{2}}),$$

以及$f(j) = 3j^2+3j+1$. 类似可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\le N} (3j^2+3j+1)d(j) \\
&= A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= [N\log N + (2c-1)N + O(N^{\frac{1}{2}})](3N^2+3N+1) \\
&\quad -\int_1^N [t\log t + (2c-1)t + O(t^{\frac{1}{2}})](6t+3)\mathrm{d}t \\
&= 3N^3\log N + 3(2c-1)N^3 + O\left(N^{\frac{5}{2}}\right) + 3N^2\log N \\
&\quad +3(2c-1)N^2 + N\log N + (2c-1)N - 7(2c-1)N \\
&\quad -\int_1^N 6t^2\log t\mathrm{d}t - \int_1^N 6(2c-1)t^2\mathrm{d}t + O\left(\int_1^N 6t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\right) \\
&\quad -\int_1^N 3t\log t\mathrm{d}t - \int_1^N 3(2c-1)t\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned}
&\int_1^N 6t^2\log t\mathrm{d}t = 2N^3\log N - \frac{2}{3}N^3 + c_1, \\
&\int_1^N 6(2c-1)t^2\mathrm{d}t = 2(2c-1)N^3 + c_2, \\
&\int_1^N 3t\log t\mathrm{d}t = \frac{3}{2}N^2\log N - \frac{3}{4}N^2 + c_2,
\end{aligned}$$

从而有

$$\sum_{j\le N} (3j^2+3j+1)d(j)$$

$$= 3N^2\log N + 3(2c-1)N^3 - 2N^3\log N + \frac{2}{3}N^3$$
$$-2(2c-1)N^3 + O\left(N^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$= N^3\log N + \left(2c - \frac{1}{3}\right)N^3 + O(N^{\frac{5}{2}}).$$

因此

$$\sum_{j\le N} d(a(n)) = \sum_{j\le N} d([n^{\frac{1}{3}}])$$
$$= \sum_{j\le N}(3j^2+3j+1)d(j) + O(N^{\epsilon})$$
$$= N^3\log N + \left(2c-\frac{1}{3}\right)N^3 + O\left(N^{\frac{5}{2}}\right) + O\left(N^{\epsilon}\right)$$
$$= \frac{1}{3}x\log x + \left(2c-\frac{1}{3}\right)x + O\left(x^{\frac{5}{6}}\right).$$

□

定理4.8.3. 设$a(n) = [n^{\frac{1}{k}}]$, $d(n)$ 为除数函数, 则有

$$\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{n\le x} d([n^{\frac{1}{k}}]) = \frac{1}{k}x\log x + O(x).$$

证明. 可得

$$\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{n\le x} d([n^{\frac{1}{k}}])$$
$$= \sum_{1^k\le i<2^k} d([i^{\frac{1}{k}}]) + \sum_{2^k\le i<3^k} d([i^{\frac{1}{k}}]) + \cdots$$
$$+ \sum_{N^k\le i<(N+1)^k} d([i^{\frac{1}{k}}]) + O(N^{\epsilon})$$
$$= (2^k-1)d(1) + (3^k-2^k)d(2) + \cdots$$
$$+((N+1)^k - N^k)d(N) + O(N^{\epsilon})$$
$$= \sum_{j\le N}\left[(j+1)^k - j^k\right]d(j) + O(N^{\epsilon}).$$

设

$$A(N) = \sum_{j\le N} d(j) = N\log N + (2c-1)N + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right),$$

以及$f(j) = (j+1)^k - j^k$, 则有

$$\sum_{j\le N}\left[(j+1)^k - j^k\right]d(j)$$

$$
\begin{aligned}
&= A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[N\log N + (2c-1)N + O(N^{\frac{1}{2}})\right]\left[(N+1)^k - N^k\right] \\
&\quad -A(1)f(1) \\
&\quad -\int_1^N \left[t\log t + (2c-1)t + O(t^{\frac{1}{2}})\right]\left(k(t+1)^{k-1} - kt^{k-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[N\log N + (2c-1)N + O(N^{\frac{1}{2}})\right]\left(\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}N^{k-l}\right) \\
&\quad -k\int_1^N \left[t\log t - 2(2c-1)t + O(t^{\frac{1}{2}})\right]\left(\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k-1}{l}t^{k-l-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \binom{k}{1}N^k\log N - \binom{k-1}{1}\int_1^N kt^{k-1}\log k\mathrm{d}t + O(N^k) \\
&= \binom{k}{1}N^k\log N - \binom{k-1}{1}N^k\log N + O(N^k) \\
&= N^k\log N + O(N^k).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x} d(a(n)) &= \sum_{n\le x} d([n^{\frac{1}{k}}]) \\
&= \sum_{j\le N}[(j+1)^k - j^k]d(j) + O(N^{\epsilon}) \\
&= N^k\log N + O(N^k) + O(N^{\epsilon}) \\
&= \frac{1}{k}x\log x + O(x).
\end{aligned}
$$

□

定理4.8.4. 设$a(n) = [\sqrt{n}]$, $\varphi(n)$ 为*Euler* 函数, 则有

$$
\sum_{n\le x}\phi(a(n)) = \sum_{n\le x}\phi([\sqrt{n}]) = \frac{4}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}} + O(x\log x).
$$

证明. 易得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\phi(a(n)) = \sum_{n\le x}\phi([\sqrt{n}]) \\
&= \sum_{1^2\le i<2^2}\phi([\sqrt{i}]) + \sum_{2^2\le i<3^2}\phi([\sqrt{i}]) + \cdots + \sum_{N^2\le i<(N+1)^2}\phi([\sqrt{i}]) + O(N) \\
&= 3\phi(1) + 5\phi(2) + \cdots + [(N+1)^2 - N^2]\phi(N) + O(N)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j\le N}(2j+1)\phi(j)+O(N).$$

设

$$A(N)=\sum_{j\le N}\phi(j)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N),$$

以及$f(j)=2j+1$, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\le N}(2j+1)\phi(j)=A(N)f(N)-A(1)f(1)-\int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t\\
&=\left[\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N)\right](2N+1)-\int_1^N\left[\frac{3}{\pi^2}t^2+O(t\log t)\right]2\mathrm{d}t\\
&=\frac{6}{\pi^2}N^3+O(N^2\log N)-\frac{2}{\pi^2}N^3+O(N^2\log N)\\
&=\frac{4}{\pi^2}N^3+O(N^2\log N).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\phi([\sqrt{n}]) &= \sum_{j\le N}(2j+1)\phi(j)+O(N)\\
&= \frac{4}{\pi^2}N^3+O(N^2\log N)+O(N)\\
&= \frac{4}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}}+O(x\log x).
\end{aligned}$$

□

定理4.8.5. 设$a(n)=[n^{\frac{1}{3}}]$, $\phi(n)$ 为*Euler* 函数, 则有

$$\sum_{n\le x}\phi(a(n))=\sum_{n\le x}\phi([n^{\frac{1}{3}}])=\frac{9}{2\pi^2}x^{\frac{4}{3}}+O(x\log x).$$

证明. 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\phi(a(n))=\sum_{n\le x}\phi([n^{\frac{1}{3}}])\\
&=\sum_{1^3\le i<2^3}\phi([i^{\frac{1}{3}}])+\sum_{2^3\le i<3^3}\phi([i^{\frac{1}{3}}])+\cdots+\sum_{N^3\le i<(N+1)^3}\phi([i^{\frac{1}{3}}])+O(N)\\
&=7\phi(1)+9\phi(2)+\cdots+[(N+1)^3-N^3]\phi(N)+O(N)\\
&=\sum_{j\le N}(3j^2+3j+1)\phi(j)+O(N).
\end{aligned}$$

设

$$A(N)=\sum_{j\le N}\phi(N)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N),$$

以及$f(j)=3j^2+3j+1$, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\le N}(3j^2+3j+1)\phi(j)\\
&=A(N)f(N)-A(1)f(1)-\int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t\\
&=\left[\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N)\right](3N^2+3N+1)\\
&\qquad -\int_1^N\left[\frac{3}{\pi^2}t^2+O(t\log t)\right](6t+3)\mathrm{d}t\\
&=\frac{9}{\pi^2}N^4-\frac{9}{2\pi^2}N^4+O(N^3\log N).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\phi([i^{\frac{1}{3}}])=\sum_{j\le N}(3j^2+3j+1)\phi(j)+O(N)\\
&=\frac{9}{2\pi^2}N^4+O(N^3\log N)+O(N)\\
&=\frac{9}{2\pi^2}x^{\frac{4}{3}}+O(x\log x).
\end{aligned}$$

□

定理4.8.6. 设$a(n)=[n^{\frac{1}{k}}]$, $\phi(n)$ 为*Euler* 函数, 则有

$$\sum_{n\le x}\phi(a(n))=\sum_{n\le x}\phi([n^{\frac{1}{k}}])=\frac{6k}{(k+1)\pi^2}x^{\frac{k+1}{k}}+O(x\log x).$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\phi(a(n))=\sum_{n\le x}\phi([n^{\frac{1}{k}}])\\
&=\sum_{1^k\le i<2^k}\phi([i^{\frac{1}{k}}])+\sum_{2^k\le i<3^k}\phi([i^{\frac{1}{k}}])+\cdots+\sum_{N^k\le i<(N+1)^k}\phi([i^{\frac{1}{k}}])+O(N)\\
&=\sum_{j\le N}\left[(j+1)^k-j^k\right]\phi(j)+O(N).
\end{aligned}$$

设

$$A(N)=\sum_{j\le N}\phi(j)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N),$$

以及$f(j)=(j+1)^k-j^k$, 则有

$$\sum_{j\le N}\left[(j+1)^k-j^k\right]\phi(j)$$

$$
\begin{aligned}
&= A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{3}{\pi^2}N^2 + O(N\log N)\right]\left[(N+1)^k - N^k\right] \\
&\quad - \int_1^k \left[\frac{3}{\pi^2}t^2 + O(t\log t)\right] k[(t+1)^{k-1} - t^{k-1}]\mathrm{d}t \\
&= \frac{3k}{\pi^2}N^{k+1} + O(N^k\log N) - \frac{k(k-1)}{k+1}\frac{3}{\pi^2}N^{k+1} \\
&= \frac{6k}{(k+1)\pi^2}N^{k+1} + O(N^k\log N).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\phi(a(n)) = \sum_{n\le x}\phi([i^{\frac{1}{k}}]) \\
&= \sum_{j\le N}\left[(j+1)^k - j^k\right]\phi(j) + O(N) \\
&= \frac{6k}{(k+1)\pi^2}N^{k+1} + O(N^k\log N) + O(N) \\
&= \frac{6k}{(k+1)\pi^2}x^{\frac{k+1}{k}} + +O(x\log x).
\end{aligned}
$$

□

§4.9 关于某个类Smarandache 函数

设$n \ge 2$ 为正整数, $a(n) = [n^{\frac{1}{k}}]$. 此外定义类Smarandache 函数如下:

$$S_1(x) = \min\{m \in \mathbb{N} : x \le m!\}, \quad x \in (1,\infty).$$

本节研究类Smarandache 函数在$a(n)$ 上的均值性质, 并给出两个渐近公式.

定理4.9.1. 设实数$x \ge 2$, 整数$k \ge 2$, 则有

$$\sum_{n\le x} S_1(a(n)) = \frac{x\log x}{k\log\log x^{\frac{1}{k}}} + O\left(\frac{x(\log x)(\log\log\log x^{\frac{1}{k}})}{(\log\log x^{\frac{1}{k}})^2}\right).$$

定理4.9.2. 对任意实数$x \ge 2$, 则有

$$\sum_{n\le x} d(n)S_1(n) = \frac{x\log^2 x}{\log\log x}\left(1 + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right),$$

其中$d(n)$ 为除数函数.

为了证明定理, 首先引入下面的两个引理.

引理4.9.1. 对任意实数$x \geq 2$, 有

$$\sum_{n\leq x} S_1(n) = \frac{x\log x}{\log\log x} + O\left(\frac{x(\log x)(\log\log\log x)}{(\log\log x)^2}\right).$$

证明. 由S_1 的定义, 可知若$(m-1)! < n \leq m!$, 则有$S_1(n) = m$. 对于$(m-1)! < n \leq m!$, 两边取对数有

$$\sum_{i=1}^{m-1} \log i < \log n \leq \sum_{i=1}^{m} \log i.$$

利用Euler 求和公式, 可得

$$\sum_{i=1}^{m} \log i = m\log m - m + O(\log m) = \sum_{i=1}^{m-1} \log i,$$

从而

$$\log n = m\log m - m + O(\log m),$$

进而有

$$m = \frac{\log n}{\log m - 1} + O(1).$$

继续取对数, 最终可得

$$m = \frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{(\log n)(\log\log\log n)}{(\log\log n)^2}\right).$$

再利用Euler 求和公式, 有估计式

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} S_1(n) &= \sum_{n\leq x} \sum_{(m-1)!<n\leq m!} m \\
&= \sum_{n\leq x} \left(\frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{(\log n)(\log\log\log n)}{(\log\log n)^2}\right)\right) \\
&= \sum_{n\leq x} \frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{x(\log x)(\log\log\log x)}{(\log\log x)^2}\right) \\
&= \frac{x\log x}{\log\log x} + O\left(\frac{x(\log x)(\log\log\log x)}{(\log\log x)^2}\right).
\end{aligned}$$

引理4.9.1 证毕. □

引理4.9.2. 对任意实数$x \geq 2$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

其中γ 为*Euler* 常数.

证明. 参阅文献[1]. □

现在证明定理. 由$a(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} S_1(a(n)) = \sum_{n\le x} S_1\left(\left[n^{\frac{1}{k}}\right]\right)\\
&= \sum_{1^k\le i<2^k} S_1(1) + \sum_{2^k\le i<3^k} S_1(2) + \cdots\\
&\quad + \sum_{N^k\le i<(N+1)^k} S_1(N) + O(N^{k-1+\epsilon})\\
&= \sum_{1\le j\le N} \left((j+1)^k - j^k\right) S_1(j) + O(N^{k-1+\epsilon}).
\end{aligned}$$

设

$$A(x) = \sum_{n\le x} S_1(n) = \frac{x\log x}{\log\log x} + O\left(\frac{x(\log x)(\log\log\log x)}{(\log\log x)^2}\right),$$

以及$f(j) = (j+1)^k - j^k$, 并假设$N^k \le x < (N+1)^k$. 由Abel 求和公式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} S_1(a(n))\\
&= A(N)f(N) - A(2)f(2) - \int_2^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t + O(N^{k-1+\epsilon})\\
&= \left(\frac{N\log N}{\log\log N} + O\left(\frac{N(\log N)(\log\log\log N)}{(\log\log N)^2}\right)\right)\left((N+1)^k - N^k\right)\\
&\quad - \int_2^N \left(\frac{t\log t}{\log\log t} + O\left(\frac{t(\log t)(\log\log\log t)}{(\log\log t)^2}\right)\right)\left((t+1)^k - t^k\right)'\mathrm{d}t\\
&= \frac{N^k\log N}{\log\log N} + O\left(\frac{N^k(\log N)(\log\log\log N)}{(\log\log N)^2}\right)\\
&= \frac{x\log x}{k\log\log x^{\frac{1}{k}}} + O\left(\frac{x(\log x)(\log\log\log x^{\frac{1}{k}})}{(\log\log x^{\frac{1}{k}})^2}\right).
\end{aligned}$$

这就证明了定理4.9.1.

另一方面, 由引理4.9.1 与引理4.9.2 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} d(n)S_1(n)\\
&= \sum_{n\le x}\sum_{(m-1)!<n\le m!} d(n)m\\
&= \sum_{n\le x} d(n)\left(\frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{(\log n)(\log\log\log n)}{(\log\log n)^2}\right)\right)\\
&= \sum_{n\le x} d(n)\frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\sum_{n\le x} d(n)\frac{(\log n)(\log\log\log n)}{(\log\log n)^2}\right).
\end{aligned}$$

设

$$A(x)=\sum_{n\le x}d(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}),$$

以及

$$f_1(t)=\frac{\log t}{\log\log t},\qquad f_2(t)=\frac{(\log t)(\log\log\log t)}{(\log\log t)^2}.$$

由Abel 求和公式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}d(n)S_1(n)\\
&=A(x)f_1(x)-A(2)f_1(2)-\int_2^x A(t)f_1'(t)\mathrm{d}t\\
&\quad +O\left(A(x)f_2(x)-A(2)f_2(2)-\int_2^x A(t)f_2'(t)\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{x\log^2 x}{\log\log x}+O\left(\frac{x(\log^2 x)(\log\log\log x)}{(\log\log x)^2}\right)\\
&=\frac{x\log^2 x}{\log\log x}\left(1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right).
\end{aligned}$$

从而证明了定理4.9.2.

§4.10 关于第83 个Smarandache 问题

对任意正整数n, 设$m_q(n)=[n^{\frac{1}{k}}]$. 例如, $m_q(1)=1$, $m_q(2)=1$, $m_q(3)=1$, $m_q(4)=1$, $\cdots$, $m_q(2^k)=2$, $m_q(2^k+1)=2$, $\cdots$, $m_q(3^k)=3$, $\cdots$. 本节研究该数列的性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.10.1. *设m 为正整数, α 为实数. 则对任意实数$x>1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha((m_q(n),m))=\frac{(2k-1)\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}+O(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}),$$

其中$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha$, ϵ 是任意实数.

取$\alpha=0$ 与1, 可得推论.

推论4.10.1. *对任意实数$x>1$, 有*

$$\sum_{n\le x}d((m_q(n),m))=\frac{(2k-1)\sigma(m)}{m}x+O(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}),$$

$$\sum_{n\le x}\sigma((m_q(n),m))=(2k-1)d(m)x+O(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}).$$

为了证明定理, 首先引入下面的引理.

引理4.10.1. 设m 为正整数, α 为实数. 则对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha((n,m))=\frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}x+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),$$

其中$\sigma_\alpha(n)=\sum\limits_{d|n}d^\alpha$, ϵ 是任意正实数.

证明. 定义

$$g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha((m,n))}{n^s}.$$

当m 给定之后, $f(n)=(m,n)$ 是可乘函数, 从而$\sigma_\alpha((m,n))$ 也是可乘函数.

由Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned}
g(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(f(p))}{p^s}+\frac{\sigma_\alpha(f(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&\quad\times\prod_{p^\beta\|m}\left(1+\frac{1+p^\alpha}{p^s}+\cdots+\frac{\sum\limits_{i=0}^{\beta}(p^i)^\alpha}{p^{\beta s}}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{\beta+1}(p^i)^\alpha}{p^{(\beta+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_{p\nmid m}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\\
&\quad\times\prod_{p^\beta\|m}\left(1+\frac{1+p^\alpha}{p^s}+\cdots+\frac{\sum\limits_{i=0}^{\beta-1}(p^i)^\alpha}{p^{\beta s}}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{\beta}(p^i)^\alpha}{p^{\beta s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\\
&= \zeta(s)\prod_{p^\beta\|m}\left(1+\frac{1}{p^{s-\alpha}}+\frac{1}{p^{2(s-\alpha)}}+\cdots+\frac{1}{p^{\beta(s-\alpha)}}\right).
\end{aligned}$$

易证估计式

$$|\sigma_\alpha((m,n))|<K=H(x),\qquad\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha((m,n))}{n^\sigma}\right|<\frac{K}{\sigma-1}=B(\sigma),$$

其中k 只与m 和α 有关, $\alpha>1$ 是s 的实部. 取$s_0=0, b=2, T=x^{3/2}, ||x||=|x-N|$. 由Perron 公式有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(f(n))=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-it}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{1/2+\epsilon}),$$

其中

$$R(s)=\prod_{p^\beta\|m}\left(1+\frac{1}{p^{s-\alpha}}+\frac{1}{p^{2(s-\alpha)}}+\cdots+\frac{1}{p^{\beta(s-\alpha)}}\right).$$

接下来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-it}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

把积分线从$s=2\pm it$ 移到$s=1/2\pm it$. 此时函数

$$\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个简单极点, 从而可得

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-it}^{2+iT}+\int_{2+it}^{1/2+iT}+\int_{1/2+it}^{1/2-iT}+\int_{1/2-it}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=R(1)x.$$

取$T=x^{3/2}$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2+it}^{1/2+iT}+\int_{1/2-it}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\\ &\ll\int_{1/2}^{2}\left|\zeta(\sigma+iT)R(s)\frac{x^2}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\\ &\ll\frac{x^2}{T}=x^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

不难证明

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2+iT}^{1/2-iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right| &\ll \int_{1}^{T}\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)R(s)\frac{x^{\frac{1}{2}}}{t}\right|\mathrm{d}t\\ &\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}R(1)&=\prod_{p^\beta\|m}\left(1+\frac{1}{p^{1-\alpha}}+\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}+\cdots+\frac{1}{p^{\beta(1-\alpha)}}\right)\\ &=\frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

从而有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(f(n))=\frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了引理4.10.1. □

现在证明定理. 对任意实数$x \geq 1$, 设正整数N 满足

$$N^k \leq x < (N+1)^k.$$

由$m_q(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha((m_q(n),m)) &= \sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(([n^{\frac{1}{k}}],m)) \\
&= \sum_{1^k\leq i<2^k}\sigma_\alpha(([i^{\frac{1}{k}}],m)) + \sum_{2^k\leq i<3^k}\sigma_\alpha(([i^{\frac{1}{k}}],m)) \\
&\quad + \cdots + \sum_{N^k\leq i<(N+1)^k}\sigma_\alpha(([i^{\frac{1}{k}}],m)) + O(N^\epsilon) \\
&= (2^k-1)\sigma_\alpha((1,m)) + (3^k-2^k)\sigma_\alpha((2,m)) \\
&\quad + \cdots + ((N+1)^k - N^k)\sigma_\alpha((N,m)) + O(N^\epsilon) \\
&= \sum_{j\leq N}[(j+1)^k - j^k]\sigma_\alpha((j,m)) + O(N^\epsilon),
\end{aligned}$$

其中ϵ 是任意正实数.

定义

$$A(N) = \sum_{j\leq N}\sigma_\alpha((j,m)).$$

由引理4.10.1 可得

$$A(N) = \sum_{j\leq N}\sigma_\alpha((j,m)) = \frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}N + O(N^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

设$f(j) = (j+1)^k - j^k$, 由Abel 求和公式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\leq N}[(j+1)^k - j^k]\sigma_\alpha((j,m)) \\
&= A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}N + O(N^{\frac{1}{2}+\epsilon})\right]\left[(N+1)^k - N^k\right] \\
&\quad -A(1)f(1) \\
&\quad -\int_1^N \left[\frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}t + O(t^{\frac{1}{2}+\epsilon})\right]\left[k(t+1)^{k-1} - kt^{k-1}\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

又由二项式定理可得

$$\sum_{j\leq N}[(j+1)^k - j^k]\sigma_\alpha((j,m)) = \frac{(2k-1)\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}N^k + O\left(N^{k-\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

从而有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x}\sigma_\alpha((m_q(n),m))=\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(([n^{\frac{1}{k}}],m))\\&=\sum_{j\le N}[(j+1)^k-j^k]\sigma_\alpha((j,m))+O(N^\epsilon)\\&=\frac{(2k-1)\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}x+O(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}).\end{aligned}$$

这就证明了定理4.10.1.

§4.11 平方根数列的一个推广

自然数的平方根数列$a(n)$ 为:

$$0,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,$$
$$5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,$$
$$7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,8,\cdots$$

即$a(n)=[n^{\frac{1}{2}}]$. 我们把上面的数列作推广为:

$$b(n)=[n^{1/k}].$$

本节利用解析方法研究$\sigma_\alpha(b(n))$ 的均值性质, 并给出一个渐近公式.

定理4.11.1. 对任意实数$x>1$ 与整数$n\ge1$, 有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(b(n))=\begin{cases}\dfrac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}x^{\frac{\alpha+k}{k}}+O(x^{\frac{\beta+k-1}{k}}), & \text{如果 } \alpha>0;\\ \dfrac{1}{k}x\log x+O(x), & \text{如果 } \alpha=0;\\ \zeta(2)x+O(x^{\frac{k+\epsilon-1}{k}}), & \text{如果 } \alpha=-1;\\ \zeta(1-\alpha)x+O(x^{\frac{\delta+k-1}{k}}), & \text{如果 } \alpha<0 \quad \text{且} \quad \alpha\ne-1,\end{cases}$$

其中$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha$ 是除数函数, $\zeta(n)$ 为*Riemann zeta* 函数, $\beta=\max(1,\alpha)$, $\delta=\max(0,1+\alpha)$, $\epsilon>0$ 是任意正实数.

为了证明定理, 首先引入下面的引理.

引理4.11.1. 设$\alpha>0$ 为给定的实数. 则对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^\beta),$$

$$\sum_{n\leq x}\sigma_{-\alpha}(n)=\begin{cases}\zeta(\alpha+1)x+O(x^{\delta}), & 如果\ \alpha\leq 1,\\ \zeta(2)x+O(\log x), & 如果\ \alpha=1,\end{cases}$$

其中$\beta=\max(1,\alpha)$, $\delta=\max(0,1-\alpha)$, $\zeta(n)$ 是*Riemann zeta* 函数.

证明. 参阅文献[1]. □

现在证明定理. 我们对α 分三种情况考虑.

情形1. 当$\alpha>0$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\sigma_{\alpha}(b(n))&=\sum_{n\leq x}\sigma_{\alpha}([n^{1/k}])\\&=\sum_{1^k\leq n<2^k}\sigma_{\alpha}([n^{1/k}])+\sum_{2^k\leq n<3^k}\sigma_{\alpha}([n^{1/k}])+\cdots\\&\quad+\sum_{N^k\leq n<(N+1)^k}\sigma_{\alpha}([n^{1/k}])+O(N^{\beta})\\&=\sum_{j\leq N}\left((j+1)-j^k\right)\sigma_{\alpha}(j)+O(N^{\beta}).\end{aligned}$$

设

$$A(n)=\sum_{j\leq n}\sigma_{\alpha}(j)\quad 以及\quad f(j)=(j+1)^k-j^k.$$

由Abel 求和公式与引理4.11.1 以及定理4.8.3 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leq x}\sigma_{\alpha}(b(n))\\&=A(N)f(N)-A(1)f(1)-\int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t+O(N^{\beta})\\&=\frac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}N^{\alpha+k}-k(k-1)\int_1^N\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}t^{\alpha+k+1}\mathrm{d}t\\&\quad+O(N^{\beta+k-1})\\&=\frac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}N^{\alpha+k}+O(N^{\beta+k-1})\\&=\frac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}x^{\frac{\alpha+k}{k}}+O\left(x^{\frac{\beta+k-1}{k}}\right).\end{aligned}$$

情形2. 当$\alpha=-1$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\sigma_{-1}(b(n))&=\sum_{n\leq x}\sigma_{-1}([n^{1/k}])\\&=\sum_{1^k\leq n<2^k}\sigma_{-1}([n^{1/k}])+\sum_{2^k\leq n<3^k}\sigma_{-1}([n^{1/k}])+\cdots\end{aligned}$$

$$+ \sum_{N^k \le n < (N+1)^k} \sigma_{-1}([n^{1/k}]) + O(N^\epsilon)$$
$$= \sum_{j \le N} \left((j+1)^k - j^k\right) \sigma_{-1}(j) + O(N^\epsilon).$$

设

$$A(n) = \sum_{j \le n} \sigma_{-1}(j) \quad 以及 \quad f(j) = (j+1)^k - j^k.$$

可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \le x} \sigma_{-1}(b(n)) = \sum_{n \le x} \sigma_{-1}([n^{1/k}]) \\
&= A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t + O(N^\epsilon) \\
&= \zeta(2)N^k + O\left(N^{k+\epsilon-1}\right) \\
&= \zeta(2)x + O\left(x^{\frac{k+\epsilon-1}{k}}\right),
\end{aligned}$$

其中$\epsilon > 0$ 是任意正实数.

情形3. 当$\alpha < 0$ 且$\alpha \ne -1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \le x} \sigma_\alpha(b(n)) = \sum_{n \le x} \sigma_\alpha([n^{1/k}]) \\
&= \sum_{1^k \le n < 2^k} \sigma_\alpha([n^{1/k}]) + \sum_{2^k \le n < 3^k} \sigma_\alpha([n^{1/k}]) + \cdots \\
&\qquad + \sum_{N^k \le n < (N+1)^k} \sigma_\alpha([n^{1/k}]) + O(N^\delta) \\
&= \sum_{j \le N} \left((j+1)^k - j^k\right) \sigma_\alpha(j) + O(N^\delta).
\end{aligned}$$

设

$$A(n) = \sum_{j \le x} \sigma_\alpha(j) \quad 以及 \quad f(j) = (j+1)^k - j^k.$$

可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \le x} \sigma_\alpha(b(n)) = \sum_{n \le x} \sigma_\alpha([n^{1/k}]) \\
&= A(N)f(N) - A(1)f(1) - \int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t + O(N^\delta) \\
&= k\zeta(1-\alpha)N^k + O(N^{\delta+k-1}) - (k-1)\zeta(1-\alpha)N^k \\
&= \zeta(1-\alpha)N^k + O(N^{\delta+k-1})
\end{aligned}$$

$$= \zeta(1-\alpha)x + O\left(x^{\frac{\delta+k-1}{k}}\right).$$

综上所述, 有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(b(n)) = \begin{cases} \dfrac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}x^{\frac{\alpha+k}{k}} + O\left(x^{\frac{\beta+k-1}{k}}\right), & \text{如果 } \alpha>0; \\ \dfrac{1}{k}x\log x + O(x), & \text{如果 } \alpha=0; \\ \zeta(2)x + O\left(x^{\frac{k+\epsilon-1}{k}}\right), & \text{如果 } \alpha=-1; \\ \zeta(1-\alpha)x + O\left(x^{\frac{\delta+k-1}{k}}\right), & \text{如果 } \alpha<0 \quad \text{且} \quad \alpha\ne -1. \end{cases}$$

这就证明了定理4.11.1.

§4.12 关于Smarandache 伪5 倍数

一个正整数被称为伪5 倍数, 如果对它的数位做某个置换(包括恒等置换) 后变成5 的倍数. 例如: $0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 51, 52, \cdots$. 设$A$ 表示伪5 倍数的集合. 本节研究该数列的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.12.1. 对任意实数$x\ge 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} f(n) = \sum_{n\le x} f(n) + O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right),$$

其中

$$M = \max_{1\le n<x}\{|f(n)|\}.$$

分别取$f(n) = d(n)$ 与$\Omega(n)$, 可得下面的推论.

推论4.12.1. 对任意实数$x\ge 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} d(n) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right),$$

其中γ 是*Euler* 常数, ϵ 是任意正实数.

推论4.12.2. 对任意实数$x\ge 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} \Omega(n) = x\ln\ln x + Bx + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中B 是可计算的常数.

现在证明定理. 设$10^k \le x < 10^{k+1}$, 即$k \le \log x < k+1$. 由A 的定义可知, 不在A 中的数的个数最多为$8+8^2+\cdots+8^k=\frac{8}{7}(8^k-1)\le 8^{k+1}$. 由于

$$8^k \le 8^{\log x} = \left(8^{\log_8 x}\right)^{\frac{1}{\log_8 10}} = (x)^{\frac{1}{\log_8 10}} = x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}},$$

可得

$$8^k = O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right).$$

设M 为$|f(n)|$ $(n \le x)$ 的上界, 则有

$$\sum_{\substack{n\notin A\\ n\le x}} f(n) = O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right).$$

从而可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} f(n) &= \sum_{n\le x} f(n) - \sum_{\substack{n\notin A\\ n\le x}} f(n)\\ &= \sum_{n\le x} f(n) + O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right).\end{aligned}$$

定理4.12.1 证毕.

由定理4.12.1 以及渐近公式

$$\sum_{n\le x} d(n) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O(x^{\frac{1}{2}})$$

可得推论4.12.1. 再由定理4.12.1 以及渐近公式

$$\sum_{n\le x} \Omega(n) = x\ln\ln x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

可得推论4.12.2.

§4.13 关于第二类伪5 倍数序列

一个正整数被称为伪5 倍数, 如果对它的数位做某个置换(包括恒等置换) 后变成5 的倍数. 类似地可定义第二类伪5 倍数. 一个正整数被称为第二类伪5 倍数, 如果它本身不是5 的倍数, 但是对它的数位作某个置换后就变成5 的倍数。为方便起见, 设A 表示伪5 倍数的集合, B 表示第二类伪5 倍数的集合.

本节研究第二类伪5 倍数序列的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.13.1. 对任意实数$x\geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leq x}} d(n)=\frac{16}{25}x\left(\ln x+2\gamma-1+\frac{\ln 5}{2}\right)+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right),$$

其中$d(n)$ 是*Dirichlet* 除数函数, γ 是*Euler* 常数, ϵ 是任意正实数.

为了证明定理, 首先引入两个引理.

引理4.13.1. 设$q=1$ 或q 为素数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} d(qn)=\left(2-\frac{1}{q}\right)x\left(\ln x+2\gamma-1+\frac{\ln q}{2q-1}\right)+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中γ 是*Euler* 常数, ϵ 为任意正实数.

证明. 若$q=1$, 由文献[1] 中的定理3.3 立即可得引理. 现在设q 为素数. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(qn)}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(qn)}{n^s}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\substack{n_1=1\\ (n_1,q)=1}}^{\infty}\frac{d(q^{\alpha+1}n_1)}{q^{s\alpha}n_1^s}\\
&= \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{2+\alpha}{q^{s\alpha}}\sum_{\substack{n_1=1\\ (n_1,q)=1}}^{\infty}\frac{d(n_1)}{n_1^s}\\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}+\frac{1}{(1-\frac{1}{q^s})^2}\right)\\
&\qquad\times\prod_{\substack{p\\ (p,q)=1}}\left(1+\frac{d(p)}{p^s}+\frac{d(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{d(p^k)}{p^{ks}}+\cdots\right)\\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}+\frac{1}{(1-\frac{1}{q^s})^2}\right)\zeta^2(s)\left(1-\frac{1}{q^s}\right)^2\\
&= \zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{q^s}\right).
\end{aligned}$$

再由Perron 公式可得

$$\sum_{n\leq x} d(qn)=\left(2-\frac{1}{q}\right)x\left(\ln x+2\gamma-1+\frac{\ln q}{2q-1}\right)+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

引理4.13.1 证毕. □

引理4.13.2. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}).$$

证明. 对任意实数$x \geq 1$, 存在非负整数k 满足$10^k \leq x < 10^{k+1}$. 由A 的定义可得

$$\sum_{\substack{n\notin A\\ n\leq x}} 1 \leq 8 + 8^2 + 8^3 + \cdots + 8^k \leq \frac{8^{k+2}}{7} \leq \frac{64}{7}8^k \leq \frac{64}{7}x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}.$$

注意到$d(n) \ll n^{\epsilon}$ 以及$\dfrac{\ln 8}{\ln 10} > 1/2$. 由引理4.12.1 有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} d(n) &= \sum_{n\leq x} d(n) - \sum_{\substack{n\notin A\\ n\leq x}} d(n)\\
&= \sum_{n\leq x} d(n) + O\left(\sum_{\substack{n\notin A\\ n\leq x}} n^{\epsilon}\right)\\
&= \sum_{n\leq x} d(n) + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right)\\
&= x\ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

引理4.13.2 证毕. □

现在证明定理. 由A 与B 的定义可知$A - B$ ={5的倍数}. 由引理4.13.1 与4.13.2 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in B\\ n\leq x}} d(n) &= \sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} d(n) - \sum_{5n\leq x} d(5n)\\
&= x\ln + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right)\\
&\quad - \frac{9}{25}x\left(\ln x - \ln 5 + 2\gamma - 1 + \frac{\ln 5}{9}\right)\\
&= \frac{16}{25}x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + \frac{\ln 5}{2}\right) + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

这就证明了定理4.13.1.

§4.14 关于正整数的三角形数剩余

对任意正整数n, 设$a(n)$ 是n 的三角形数剩余. 即

$$a(n) = n - \frac{k(k+1)}{2},$$

, 其中k 是满足

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq n$$

的最大正整数. 例如,

$$a(1) = 0,\ a(2) = 1,\ a(3) = 0,\ a(4) = 1,\ a(5) = 2,\ a(6) = 0, \cdots .$$

本节研究该数列的性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.14.1. 对任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + O(x).$$

定理4.14.2. 对任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n \leq x} d(a(n)) = \frac{1}{2} x \ln x + \left(2\gamma + \frac{\ln 2 - 3}{2}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

其中$d(n)$ 是*Dirichlet* 除数函数, γ 是*Euler* 常数.

现在证明定理. 对任意实数$x \geq 3$, 设正整数M 满足

$$\frac{M(M+1)}{2} \leq x < \frac{(M+1)(M+2)}{2}.$$

则由$a(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} a(n) &= \sum_{k=1}^{M} \sum_{\frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}} a(n) - \sum_{x < n < \frac{(M+1)(M+2)}{2}} a(n) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \sum_{i \leq \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1 - \frac{k(k+1)}{2}\right)} i + O\left(\sum_{s \leq \left(\frac{(M+1)(M+2)}{2} - \frac{M(M+1)}{2}\right)} s \right) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=0}^{k} i + O\left(M^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M} k(k+1) + O\left(M^2\right)$$
$$= \frac{1}{6}M^3 + O\left(M^2\right).$$

注意到估计式
$$\frac{M}{2} \le x - \frac{M^2}{2} < \frac{3}{2}M + 1.$$
从而可得
$$\sum_{n\le x} a(n) = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).$$
这就证明了定理4.14.1

利用类似地方法可得
$$\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=0}^{k} d(i) + \sum_{\frac{M(M+1)}{2}<n\le x} d(a(n)).$$
再由渐近公式
$$\sum_{n\le x} d(n) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O(x^{\frac{1}{3}}),$$
可得
$$\sum_{n\le x} d(a(n))$$
$$= \sum_{k=1}^{M}\left(k\ln k + (2\gamma-1)k + O(k^{\frac{1}{3}})\right) + O\left(\sum_{i\le x-\frac{M(M+1)}{2}} d(i)\right)$$
$$= \frac{1}{2}M^2\ln M - \frac{1}{4}(M^2-1) + \frac{1}{2}(2\gamma-1)M^2 + O(M^{\frac{4}{3}}).$$

综上所述, 有
$$\sum_{n\le x} d(a(n)) = \frac{1}{2}x\ln x + \left(2\gamma + \frac{\ln 2 - 3}{2}\right) + O(x^{\frac{3}{2}}).$$
这就证明了定理4.14.2.

§4.15 正整数的k 次方部分

设n 为正整数, $k > 1$ 为整数. 定义$a(n)$ 为不超过n 的最大k 次幂, $b(n)$ 为不小于n 的最小k 次幂. 例如, 当$k = 2$ 时有$a(1) = a(2) = a(3) = 1$, $a(4) =$

$a(5)=a(6)=a(7)=4,\cdots,\ b(1)=1,\ b(2)=b(3)=b(4)=4,\ b(5)=b(6)=b(7)=b(8)=8,\cdots$. 当$k=3$ 时, $a(1)=a(2)=\cdots=a(7)=1$, $a(8)=a(9)=\cdots=a(26)=8,\cdots,\ b(1)=1,\ b(2)=b(3)=\cdots=b(8)=8$, $b(9)=b(10)=\cdots=b(27)=27,\cdots$.

本节研究这两个数列的性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.15.1. 对任意实数$x>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}d(a(n)) &= \frac{1}{kk!}\left(\frac{6}{k\pi^2}\right)^{k-1}A_0x\ln^k x+A_1x\ln^{k-1}x+\cdots\\ &\quad +A_{k-1}x\ln x+A_kx+O\left(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),\end{aligned}$$

其中$A_0,A_1,\cdots,A_k$ 为常数, 特别当$k=2$ 时有$A_0=1$. $d(n)$ 为除数函数, ϵ 是任意实数.

定理4.15.2. 对任意实数$x>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}d(b(n)) &= \frac{1}{kk!}\left(\frac{6}{k\pi^2}\right)^{k-1}A_0x\ln^k x+A_1x\ln^{k-1}x+\cdots\\ &\quad +A_{k-1}x\ln x+A_kx+O\left(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).\end{aligned}$$

为了证明定理, 首先引入一个引理.

引理4.15.1. 对任意实数$x>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}d(n^k) &= \frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1}B_0x\ln^k x+B_1x\ln^{k-1}x+\cdots\\ &\quad +B_{k-1}x\ln x+B_kx+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),\end{aligned}$$

其中$B_0,B_1,\cdots,B_k$ 为常数, 特别当$k=2$ 时有$B_0=1$. ϵ 是任意正实数.

证明. 设$s=\sigma+it$ 为复数, 并定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n^k)}{n^s}.$$

注意到$d(n^k)\ll n^\epsilon$, 则当$\mathrm{Re}\ s>1$ 时, $f(s)$ 收敛. 由Euler 乘积公式以及$d(n)$ 的定义可得

$$f(s) = \prod_p\left(1+\frac{d(p^k)}{p^s}+\frac{d(p^{2k})}{p^{2s}}+\cdots+\frac{d(p^{nk})}{p^{ns}}+\cdots\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_p \left(1+\frac{k+1}{p^s}+\frac{2k+1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{kn+1}{p^{ns}}+\cdots\right)\\
&= \zeta^2(s)\prod_p \left(1+(k-1)\frac{1}{p^s}\right)\\
&= \zeta^2(s)\prod_p \left(\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{k-1}-C_{k-1}^2\frac{1}{p^{2s}}-\cdots-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)\\
&= \frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^{k+1}(2s)}g(s),
\end{aligned}
$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod_p$ 表示对所有素数求乘积.

由Perron 公式有

$$
\sum_{n\le x} d(n^k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^{k-1}(2s)}g(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{2+\epsilon}}{T}\right).
$$

把积分线移动至Re $s=\frac{1}{2}+\epsilon$. 在$s=1$ 处的留数为

$$
\frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1}B_0x\ln^k x+B_1x\ln^{k-1}x+\cdots+B_{k-1}x\ln x+B_kx,
$$

其中$B_0,B_1,\cdots,B_k$ 为常数, 且当$k=2$ 时有$B_0=1$. 注意到当$\frac{1}{2}\le\sigma<1$ 时有$\zeta(s)=\zeta(\sigma+it)\le|t|^{\frac{1-\sigma}{2}+\epsilon}$. 从而另3条积分线上的积分可估计为

$$
O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}+\frac{x^2}{T}\right).
$$

取$T=x^{\frac{3}{2}}$, 综上可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x} d(n^k) &= \frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1}B_0x\ln^k x+B_1x\ln^{k-1}x+\cdots\\
&\quad +B_{k-1}x\ln x+B_kx+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).
\end{aligned}
$$

引理4.15.1 证毕. □

现在证明定理. 对任意实数$x\ge 1$, 设正整数M 满足

$$
M^k\le x<(M+1)^k.
$$

则由$a(n)$ 的定义有

$$
\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{m=2}^{M}\sum_{(m-1)^k\le n<m^k} d(a(n))+\sum_{M^k\le n\le x} d(a(n))
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{m^k\le n<(m+1)^k} d(m^k) + \sum_{M^k\le n\le x} d(M^k) \\
&= \sum_{m=1}^{M-1} \left(C_k^1 m^{k-1} + C_k^2 m^{k-2} + \cdots + 1\right) d(m^k) \\
&\quad + O\left(\sum_{M^k\le n\le (M+1)^k} d(M^k)\right) \\
&= k\sum_{m=1}^{M} m^{k-1} d(m^k) + O(M^{k-1+\epsilon}).
\end{aligned}
$$

设

$$
B(y) = \sum_{n\le y} d(n^k).
$$

由Abel 公式以及引理4.15.1 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{M} m^{k-1} d(m^k) \\
&= M^{k-1}B(M) - (k-1)\int_1^M y^{k-2}B(y)\mathrm{d}y + O(1) \\
&= M^{k-1}\left(\frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1} B_0 M\ln^k M + B_1 M\ln^{k-1} M + \cdots + B_k M\right) \\
&\quad -(k-1)\int_1^M \left(\frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1} B_0 y^{k-1}\ln^k y + B_1 y^{k-1}\ln^{k-1} y \right.\\
&\quad \left. + \cdots + B_k y^{k-1}\right)\mathrm{d}y \\
&\quad + O(M^{k-1/2+\epsilon}) \\
&= \frac{1}{kk!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1} B_0 M^k\ln^k M + C_1 M^k\ln^{k-1} M + \cdots + C_{k-1}M^k \\
&\quad + O(M^{k-1/2+\epsilon}).
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x} d(a(n)) &= \frac{1}{kk!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{k-1} B_0 M^k\ln^k M + C_1 M^k\ln^{k-1} M + \cdots + C_{k-1}M^k \\
&\quad + O(M^{k-1/2+\epsilon}),
\end{aligned}
$$

其中$B_0, C_1, \cdots, C_{k-1}$ 为常数.

易证估计式

$$
0 \le x - M^k < (M+1)^k - M^k = kM^{k-1} + C_k^2 M^{k-2} + \cdots + 1
$$

$$= M^{k-1}\left(k + C_k^2\frac{1}{M} + \cdots + \frac{1}{M^{k-1}}\right) \ll x^{\frac{k-1}{k}},$$

与

$$\ln^k x = k^k \ln^k M + O\left(\frac{\ln^{k-1} x}{x^{\frac{1}{k}}}\right) = k^k \ln^k M + O\left(x^{-\frac{1}{k}+\epsilon}\right).$$

综上可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} d(a(n)) &= \frac{1}{kk!}\left(\frac{6}{k\pi^2}\right)^{k-1} A_0 x\ln^k x + A_1 x\ln^{k-1} x + \cdots + A_{k-1}x\ln x \\ &\quad + A_k x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),\end{aligned}$$

其中$A_0 = B_0$. 这就证明了定理4.15.1. 类似可证定理4.15.2.

§4.16 可加六边形补数

设n 为正整数. 若存在正整数m 使得$n = m(2m-1)$, 就称n 为六边形数. 另一方面, n 的k 次补数$b_k(n)$ 是指使得$nb_k(n)$ 为k 次幂的最小正整数. 类似地, 可定义可加六边形数$a(n)$ 为: $a(n)$ 是使得$a(n)+n$ 为六边形数的最小非负整数. 例如, 当$n = 1, 2, \cdots, 15$ 时, 可得$a(n) = 0, 4, 3, 2, 1, 0, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$.

本节研究函数$d(a(n))$ 的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.16.1. 对任意实数$x \ge 3$, 有

$$\sum_{n\le x} a(n) = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).$$

定理4.16.2. 对任意实数$x \ge 3$, 有

$$\sum_{n\le x} d(a(n)) = \frac{1}{2}x\log x + \left(\frac{3}{2}\log 2 + (2\gamma-1) - \frac{1}{2}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

其中γ 为$Euler$ 常数.

为了证明定理, 首先引入下面的一些引理.

引理4.16.1. 对任意实数$x \ge 3$, 有

$$\sum_{n\le x} d(x) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O(x^{\frac{1}{3}}),$$

其中γ 为$Euler$ 常数.

证明. 参阅文献[1]. □

引理4.16.2. 设$x \geq 3$ 为实数, $f(n)$ 为非负的数论函数, 满足$f(0)=0$. 则有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} f(a(n)) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]} \sum_{i\leq 4m} f(i) + O\left(\sum_{i\leq 4\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]} f(i)\right),$$

其中$[x]$ 表示不超过x 的最大整数.

证明. 对任意实数$x \geq 1$, 设正整数M 满足

$$M(2M-1) \leq x < (M+1)(2M+1).$$

注意到当n 取遍区间

$$[m(2m-1),(m+1)(2m+1))$$

时, $a(n)$ 也取遍区间$[0,4m]$. 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} f(a(n)) &= \sum_{n\leq M(2M-1)} f(a(n)) + \sum_{M(2M-1)<n\leq x} f(a(n)) \\ &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{i\leq 4m} f(i) + O\left(\sum_{i\leq x-M(2M-1)} f(i)\right).\end{aligned}$$

注意到

$$x - M(2M-1) < (M+1)(2M+1) - M(2M-1) = 4M+1$$

与

$$M = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right],$$

可得

$$\sum_{n\leq x} f(a(n)) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]} \sum_{i\leq 4m} f(i) + O\left(\sum_{i\leq 4\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]} f(i)\right).$$

引理4.16.2 证毕. □

现在证明定理. 由$a(n)$ 的定义以及Euler 求和公式有

$$\sum_{n\leq x} a(n) = \sum_{n\leq M(2M-1)} a(n) + \sum_{M(2M-1)<n\leq x} a(n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{i\le 4m} i + \sum_{i\le x-M(2M-1)} i \\
&= \sum_{m=1}^{M} 2m(4m+1) + O\left(\frac{(4M)^2}{2}\right) \\
&= \frac{4}{3}M(M+1)(2M+1) + O(M^2) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).
\end{aligned}
$$

这就证明了定理4.16.1.

另一方面, 由引理4.16.1, 4.16.2 以及Abel 等式可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} d(a(n)) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{i\le 4m} d(i) + O\left(\sum_{i\le 4M} d(i)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{M}\left(4m\log 4m + (2\gamma-1)4m + O((4m)^{\frac{1}{3}})\right) \\
&\qquad + O\left(4M\log 4M + (2\gamma-1)4M + O((4M)^{\frac{1}{3}})\right) \\
&= (8\log 2 + 4(2\gamma-1))\sum_{m\le M} m + 4\sum_{m\le M} m\log m \\
&\qquad + O\left(\sum_{m\le M} m^{\frac{1}{3}}\right) + O(4M\log 4M) \\
&= (8\log 2 + 4(2\gamma-1)))\left(\frac{1}{2}M^2 + O(M)\right) \\
&\qquad + 4\left(\frac{1}{2}M^2\log M - \frac{1}{4}(M^2-1) + O(M\log M)\right) + O(M^{\frac{4}{3}}) \\
&= 2M^2\log M + (4\log 2 + 2(2\gamma-1) - 1)M^2 + O(M^{\frac{4}{3}}) \\
&= \frac{1}{2}x\log x + \left(\frac{3}{2}\log 2 + (2\gamma-1) - \frac{1}{2}\right)x + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right).
\end{aligned}
$$

这就证明了定理4.16.2.

§4.17 关于Smarandache 简单函数的均值

Smarandache 简单加性函数的定义如下:

$$p(x) = \min\left\{m \in \mathbb{N}^+ : p^x \le m!\right\}$$

与

$$p^*(x) = \min\left\{m \in \mathbb{N}^+ : m! \le p^x\right\}.$$

本节利用解析方法研究这两个函数的渐近性质, 并给出两个渐近公式.

定理4.17.1. 设p 为一个给定的素数. 则对于任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(p(n)) = x(\ln x - \ln\ln x) + O(x).$$

定理4.17.2. 设p 为一个给定的素数. 则对于任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(p^*(n)) = x(\ln x - \ln\ln x) + O(x).$$

为了完成定理的证明, 首先引入几个引理.

引理4.17.1. 对于任意实数$x > 1$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + (2c-1)x + O(\sqrt{x}),$$

其中c 为$Euler$ 常数.

证明. 参阅文献[1]. □

引理4.17.2. 对于任意实数$x > 1$, 有

$$\sum_{i=1}^{x} \frac{\ln i}{i} = \frac{1}{2}\ln^2 x + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

其中A 为常数.

证明. 参阅文献[1]. □

接下来证明定理. 由$d(n)$ 及$p(n)$ 的定义可知

$$\sum_{n\leq x} d(p(n)) = \sum_{n\leq x} \sum_{\frac{\ln(m-1)!}{\ln p} < m \leq \frac{\ln(m)!}{\ln p}} d(m).$$

由于当

$$n \in \left(\frac{\ln(m-1)!}{\ln p}, \frac{\ln(m)!}{\ln p}\right]$$

时, $p(n) = m$, 又因为$n \leq x$, 那么区间

$$\left(\frac{\ln(m-1)!}{\ln p}, \frac{\ln(m)!}{\ln p}\right]$$

中最大的数也一定小于等于x, 于是得到

$$\frac{\ln(m)!}{\ln p} \leq x,$$

即$\ln(m)! \le x\ln p$. 结合Euler 求和公式, 即可得到$\ln(m)!$ 的主项为 $m\ln m$, 并且$m\ln m \le x\ln p$.

如果x 足够大, 那么$\ln m$ 渐近于$\ln x$, 于是有

$$m \le \frac{x\ln p}{\ln x}.$$

根据上面的分析可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} d(p(n)) &= \sum_{n\le x}\sum_{\frac{\ln(m-1)!}{\ln p}<m\le\frac{\ln(m)!}{\ln p}} d(m) = \sum_{m\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]d(m) + O(x\ln p)\\
&= \sum_{m\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]d(m) + O(x) = \left(\frac{1}{\ln p}\right)\sum_{un\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\ln(un) + O(x)\\
&= \left(\frac{2}{\ln p}\right)\sum_{u\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\ln u\sum_{n\le\frac{x\ln p}{u\ln x}}1 + O(x)\\
&= \left(\frac{2}{\ln p}\right)\sum_{u\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\ln u\cdot\left[\frac{x\ln p}{u\ln x}\right] + O(x)\\
&= \left(\frac{2x}{\ln p}\right)\sum_{u\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\frac{\ln u}{u} + O(x)\\
&= \left(\frac{2x}{\ln p}\right)\left(\frac{1}{2}(\ln x + \ln\ln p - \ln\ln x)^2\right) + O(x)\\
&= x(\ln x - 2\ln\ln x) + O(x).
\end{aligned}$$

这就证明了定理4.17.1. 类似可证定理4.17.2.

§4.18 关于Smarandache ceil 函数(I)

设k, n 为正整数. Smarandache ceil 函数$S_k(n)$ 的定义如下:

$$S_k(n) = \min\left\{m\in\mathbb{N} : n \mid m^k\right\}.$$

可证$S_k(n)$ 是可乘函数. 本节研究$d(S_k(n))$ 的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.18.1. *设正整数$k \ge 2$. 则对任意实数$x \ge 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\le x} d(S_k(n)) = \frac{6\zeta(k)x\ln x}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k+p^{k-1}}\right) + Cx + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中C 是可计算的常数, ϵ 是任意正实数.

在定理4.18.1 中取$k=2$ 与$k=4$, 并注意到

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\qquad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},$$

从而可得下面的推论.

推论4.18.1. 对任意实数$x\geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x} d(S_2(n)) = x\ln x\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}\right)+C_1x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leq x} d(S_4(n)) = \frac{\pi^2 x\ln x}{15}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^4+p^3}\right)+C_2x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中C_1, C_2 是可计算的常数.

此外当$k=1$ 时, 易证

$$\sum_{n\leq x} d(S_1(n))=\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x+(2\gamma-1)x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

其中γ 是Euler 常数.

现在证明定理. 设

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(S_k(n))}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{d(S_k(p))}{p^s}+\frac{d(S_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{d(p)}{p^s}+\cdots+\frac{d(p)}{p^{ks}}+\frac{d(p^2)}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{d(p^2)}{p^{2ks}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\cdots+\frac{2}{p^{ks}}+\frac{3}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\times\left(\frac{2}{p^s}+\frac{3}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\right)\\
&= \zeta(s)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\times\left(1+\frac{1}{p^{ks}}+\frac{1}{p^{2ks}}+\cdots\right)\right)\\
&= \zeta(s)\zeta(ks)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{ks}}+\frac{1}{p^s}\right)\\
&= \zeta(s)\zeta(ks)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{ks}+p^{(k-1)s}}\right),
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

显然有

$$|d(S_k(n))| \leq n, \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(S_k(n))}{n^{\sigma}}\right| \leq \frac{1}{\sigma-1},$$

其中$\sigma>1$ 是s 的实部. 在Perron 公式中取$s_0=0, b=\dfrac{3}{2}, T=x$, 可得

$$\sum_{n\leq x} d(S_k(n)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中

$$R(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{ks}+p^{(k-1)s}}\right),$$

ϵ 是任意正实数.

注意到函数

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)}R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个二阶极点, 留数为

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\left((s-1)^2\frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)}R(s)\frac{x^s}{s}\right)'\\
&=\lim_{s\to 1}\left(\left((s-1)^2\frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)}R(s)\right)'\frac{x^s}{s}\right.\\
&\qquad\left.+(s-1)^2\frac{\zeta^2(s)\zeta(ks)}{\zeta(2s)}R(s)\frac{sx^s\ln x - x^s}{s^2}\right)\\
&=\frac{6\zeta(k)x\ln x}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k+p^{k-1}}\right)+Cx,
\end{aligned}$$

其中C 为可计算的常数. 从而有

$$\sum_{n\leq x} d(S_k(n)) = \frac{6\zeta(k)x\ln x}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k+p^{k-1}}\right)+Cx+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理4.18.1.

§4.19 关于Smarandache ceil 函数(II)

设k,n 为正整数. Smarandache ceil 函数$S_k(n)$ 的定义为:

$$S_k(n)=\min\left\{x\in\mathbb{N}: n|x^k\right\} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

本节进一步研究$\sigma_\alpha(S_k(n))$ 的均值性质, 并给出一个渐近公式.

定理4.19.1. 设$\alpha > 0$, $\sigma_\alpha(n) = \sum\limits_{d|n} d^\alpha$. 则对任意实数$x \geq 2$ 与正整数$k \geq 2$, 有渐近公式

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(S_k(n)) &= \frac{6x^{\alpha+1}\zeta(\alpha+1)\zeta(k(\alpha+1)-\alpha)}{(\alpha+1)\pi^2}R(\alpha+1)\\ &\quad +O(x^{\alpha+1/2+\epsilon}),\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是*Riemann zeta* 函数, ϵ 是任意正实数以及

$$R(\alpha+1) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k(\alpha+1)-\alpha}-p^{(k-1)(\alpha+1)}}\right).$$

现在证明定理. 定义

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(S_k(n))}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(S_k(p))}{p^s}+\frac{\sigma_\alpha(S_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(S_k(p^k))}{p^{ks}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^s}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{ks}}+\frac{\sigma_\alpha(p^2)}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\sigma_\alpha(p^2)}{p^{2ks}}+\frac{\sigma_\alpha(p^3)}{p^{(2k+1)s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{1+p^\alpha}{p^s}+\frac{1+p^\alpha+p^{2\alpha}}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\right)\\
&= \zeta(s)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-\alpha}}\left(1+\frac{1}{p^{ks-\alpha}}+\frac{1}{p^{2(ks-\alpha)}}+\frac{1}{p^{3(ks-\alpha)}}+\cdots\right)\right)\\
&= \zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{ks-\alpha}}+\frac{1}{p^{s-\alpha}}\right)\\
&= \frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\zeta(ks-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{ks-\alpha}-p^{(k-1)s}}\right),\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

显然有不等式

$$|\sigma_\alpha(S_k(n))| \leq n, \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(S_k(n))}{n^\sigma}\right| < \frac{1}{\sigma-1-\frac{\alpha+1}{k}},$$

其中$\sigma > 1 + \dfrac{\alpha+1}{k}$ 是s 的实部. 在Perron 公式中取$s_0 = 0, b = \alpha + \dfrac{3}{2}, T = x^{\alpha+\frac{1}{2}}, H(x) = x, B(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma - 1 - \alpha}$, 有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(S_k(n)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+\frac{3}{2}-iT}^{\alpha+\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\zeta(ks-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{\alpha+1/2+\epsilon}\right),$$

其中

$$R(s) = \prod_p\left(1 - \frac{1}{p^{ks-\alpha} - p^{(k-1)s}}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\zeta(ks-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))}R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s = \alpha + 1$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{\zeta(\alpha+1)\zeta(k(\alpha+1)-\alpha)}{(\alpha+1)\zeta(2)}R(\alpha+1)x^{\alpha+1}.$$

因此有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(S_k(n)) = \frac{6x^{\alpha+1}\zeta(\alpha+1)\zeta(k(\alpha+1)-\alpha)}{(\alpha+1)\pi^2}R(\alpha+1) + O(x^{\alpha+1/2+\epsilon}).$$

这就证明了定理4.19.1.

§4.20 关于Smarandache ceil 函数的对偶函数(I)

设k, n 为正整数. Smarandache ceil 函数$S_k(n)$ 的定义为

$$S_k(n) = \min\left\{x \in \mathbb{N} : n \mid x^k\right\}.$$

现在定义$S_k(n)$ 的对偶函数如下:

$$\bar{S}_k(n) = \max\left\{x \in \mathbb{N} : x^k \mid n\right\}.$$

可证$\bar{S}_k(n)$ 也是可乘函数.

本节研究$d(\bar{S}_k(n))$ 的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.20.1. *设$k \ge 2$ 为整数. 则对任意实数$x > 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_1(n)) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

与

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_k(n)) = \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} + O\left(x^{\frac{1}{k+1}}\right),$$

其中γ 是*Euler* 常数, $\zeta(s)$ 为*Riemann zeta* 函数.

由定理可得下面的推论.

推论4.20.1. 对任意实数$x > 1$, 有

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_2(n)) = \frac{\pi^2}{6}x + \zeta\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

推论4.20.2. 对任意实数$x > 1$, 有

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_4(n)) = \frac{\pi^4}{90}x + \zeta\left(\frac{1}{4}\right)x^{\frac{1}{4}} + O(x^{\frac{1}{5}}).$$

为了证明定理, 首先引入下面的引理.

引理4.20.1. 设$x \ge 1$, $s \ge 0$ 且$s \ne 1$. 则有

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}),$$

其中

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt.$$

证明. 参阅文献[1]. □

现在证明定理. 显然有$\bar{S}_1(n) = n$, 从而可证定理的第1 式. 接下来假设$k \ge 2$, 有

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_k(n)) = \sum_{n\le x}\sum_{d|\bar{S}_k(n)} 1.$$

由$\bar{S}_k(n)$ 的定义可知

$$d \mid \bar{S}_k(n) \Longleftrightarrow d^k \mid n,$$

因此

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_k(n)) = \sum_{n\le x}\sum_{d^k|1} 1 = \sum_{d^k l\le x} 1.$$

设$\delta = x^{\frac{1}{k+1}}$, 由上可得

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_k(n)) = \sum_{d^k l\le x} 1$$

$$= \sum_{1\le d^k\le \delta^k} \sum_{1\le l\le x/\delta^k} 1 + \sum_{1\le l\le \delta} \sum_{1\le d^k\le x/l} 1 - \sum_{1\le d^k\le \delta^k} 1 \sum_{1\le l\le \delta} 1$$
$$= \sum_{1\le d\le \delta} \sum_{1\le l\le x/\delta^k} 1 + \sum_{1\le l\le \delta} \sum_{1\le d^k\le x/l} 1 - [\delta]^2$$
$$= \sum_{1\le d\le \delta} \left[\frac{x}{d^k}\right] + \sum_{1\le l\le \delta} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^{1/k}\right] - (\delta^2 - 2\delta\{\delta\} + \{\delta\}^2).$$

由引理4.20.1 有

$$\sum_{n\le x} d(\bar{S}_k(n)) = x \sum_{1\le d\le \delta} \frac{1}{d^k} + x^{1/k} \sum_{1\le l\le \delta} \frac{1}{l^{l/k}} + O(\delta) - \left(\delta^2 + O(\delta)\right)$$
$$= x\left(\frac{\delta^{1-k}}{1-k} + \zeta(k) + O(\delta^{-k})\right) + x^{1/k}\left(\frac{\delta^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right) + O\left(\delta^{-\frac{1}{k}}\right)\right)$$
$$-\delta^2 + O(\delta).$$

注意到$x = \delta^{k+1}$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} d(\bar{S}_k(n)) &= \frac{\delta^2}{1-k} + \zeta(k)x + \frac{\delta^2}{1-\frac{1}{k}} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} - \delta^2 + O(\delta) \\ &= \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} + O(\delta) \\ &= \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} + O\left(x^{\frac{1}{k+1}}\right).\end{aligned}$$

这就证明了定理4.20.1.

§4.21 关于Smarandache ceil 函数的对偶函数(II)

设k, n 为正整数. Smarandache ceil 函数$S_k(n)$ 的定义为

$$S_k(n) = \min\left\{x \in \mathbb{N} : n \mid x^k\right\}.$$

现在定义$S_k(n)$ 的对偶函数如下:

$$\bar{S}_k(n) = \max\left\{x \in \mathbb{N} : x^k \mid n\right\}.$$

可证$\bar{S}_k(n)$ 也是可乘函数.

本节研究$\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))$ 的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理4.21.1. 设$\alpha \ge 0$, $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d\mid n} d^\alpha$. 则对任意实数$x \ge 1$ 以及任意正整

数$k\geq 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))=\begin{cases}\dfrac{k\zeta(\frac{\alpha+1}{k})}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}}+O\left(x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}\right), & \text{如果 } \alpha>k-1,\\ \zeta(k-\alpha)x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right), & \text{如果 } \alpha\leq k-1,\end{cases}$$

其中$\zeta(s)$ 是$Riemann\ zeta$ 函数, ϵ 是任意正实数.

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))}{n^s}.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(\bar{S}_k(p))}{p^s}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(\bar{S}_k(p^k))}{p^{ks}}+\cdots\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(1)}{p^s}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(1)}{p^{(k-1)s}}\right.\\ &\qquad \left.+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{ks}}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{(2k-1)s}}+\frac{\sigma_\alpha(p^2)}{p^{2ks}}+\cdots\right)\\ &= \prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}+\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{1+p^\alpha}{p^{ks}}+\frac{1+p^\alpha+p^{2\alpha}}{p^{ks}}+\cdots\right)\right)\\ &= \zeta(s)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{ks-\alpha}}+\frac{1}{p^{2(ks-\alpha)}}+\frac{1}{p^{3(ks-\alpha)}}+\cdots\right)\\ &= \zeta(s)\zeta(ks-\alpha),\end{aligned}$$

其中ζ 是Riemann zeta 函数.

显然有不等式

$$\left|\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))\right|\leq n,\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))}{n^\sigma}\right|<\frac{1}{\sigma-1-\frac{\alpha+1}{k}},$$

其中$\sigma>1+\dfrac{\alpha+1}{k}$ 是s 的实部. 在Perron 公式中取

$$s_0=0,b=\frac{\alpha+1}{k}+\frac{1}{\ln x},T=x^{\frac{\alpha+1}{2k}},H(x)=x,B(\sigma)=\frac{1}{\sigma-1-\frac{\alpha+1}{k}},$$

则有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))=\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}\right).$$

当$\alpha > k-1$ 时, 函数

$$\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}$$

在$s=\dfrac{\alpha+1}{k}$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{k\zeta\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}}.$$

从而有

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))=\frac{k\zeta\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}}+O\left(x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}\right).$$

若$0\le\alpha\le k-1$, 则函数

$$\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个简单极点, 留数为$\zeta(k-\alpha)x$. 类似可得渐近公式

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(\bar{S}_k(n))=\zeta(k-\alpha)x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理4.21.1.

第五章　函数$e_p(n)$ 的均值

对任意素数p, 设$e_p(n)$ 表示n 中包含素数p 的最大指数, 即

$$e_p(n) = \max\{\alpha : p^\alpha \mid n\}.$$

本章研究与函数$e_p(n)$ 有关的若干均值问题, 并给出一些渐近公式.

§5.1　函数$e_{pq}(n)$ 的均值性质

设p, q 是两个不同的素数, $e_{pq}(n)$ 表示n 中包含pq 的最大指数, 即

$$e_{pq}(n) = \max\{\alpha : (pq)^\alpha \mid n\}.$$

本节研究函数$e_{pq}(n)$ 的均值分布, 并给出一个渐近公式.

定理5.1.1. *设p, q 是两个不同的素数. 则对任意实数$x \geq 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n \leq x} e_{pq}(n) = \frac{x}{pq-1} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ 是任意正实数.

现在证明定理. 定义

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_{pq}(n)}{n^s}.$$

由$e_{pq}(n)$ 的定义以及Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,pq)=1}}^{\infty} \frac{\alpha}{(p^{\alpha+t} q^\alpha n_1)^s} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,pq)=1}}^{\infty} \frac{\alpha}{(p^\alpha q^{\alpha+t} n_1)^s} \\ &\quad + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,pq)=1}}^{\infty} \frac{\alpha}{(p^\alpha q^\alpha n_1)^s} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(pq)^{\alpha s}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ts}} \sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1,pq)=1}}^{\infty} \frac{1}{n_1^s} \end{aligned}$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha}{(pq)^{\alpha s}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{q^{ts}}\sum_{\substack{n_1=1\\(n_1,pq)=1}}^{\infty}\frac{1}{n_1^s}$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha}{(pq)^{\alpha s}}\sum_{\substack{n_1=1\\(n_1,pq)=1}}^{\infty}\frac{1}{n_1^s}$$

$$= \frac{\zeta(s)}{(pq)^s-1},$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

显然有

$$e_{pq}(n)\le \log_{pq} n\le \ln n,\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_{pq}(n)}{n^{\sigma}}\right|\le\frac{1}{\sigma-1},$$

其中σ 是s 的实部. 在Perron 公式中取$s_0=0$, $b=\frac{3}{2}$, $H(x)=\ln x$, $B(\sigma)=\frac{1}{\sigma-1}$, 可得

$$\sum_{n\le x}e_{pq}(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta(s)}{(pq)^s-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}+\epsilon}}{T}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta(s)}{(pq)^s-1}\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{x}{pq-1}.$$

则有渐近公式

$$\sum_{n\le x}e_{pq}(n)=\frac{x}{pq-1}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

这就证明了定理5.1.1.

§5.2 函数$e_{pq}(n)$ 与完全k 次幂

设p,q 是两个不同的素数, $e_{pq}(n)$ 表示n 中包含pq 的最大指数, 即

$$e_{pq}(n)=\max\left\{\alpha:(pq)^{\alpha}\mid n\right\}.$$

另一方面, 正整数n 称为完全k 次幂, 如果由$p^{\alpha}\parallel n$ 可得$k\mid\alpha$. 设A 表示完全k 次幂的集合. 本节研究函数$e_{pq}(n)$ 在集合A 上的均值, 并给出一个渐近公式.

定理5.2.1. 设p, q 是两个不同的素数. 则对任意实数$x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} e_{pq}(n) = C_{p,q} k x^{\frac{1}{k}} + O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),$$

其中

$$C_{p,q} = \frac{(p-1)(q-1)}{pq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(pq)^n}$$

是可计算的常数, ϵ 是任意正实数.

现在证明定理. 定义函数$a(n)$ 如下:

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n \text{ 是完全} k \text{ 次幂;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

首先引入下面的引理.

引理5.2.1. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,pq)=1}} a(n) = x^{\frac{1}{k}} \frac{(p-1)(q-1)}{pq} + O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

证明. 定义

$$f(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,pq)=1}}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \qquad \text{Re} \quad s > 1.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_{\substack{P \\ (P,pq)=1}} \left(1 + \frac{a(P^k)}{P^{ks}} + \frac{a(P^{2k})}{P^{2ks}} + \cdots\right) \\ &= \prod_{P} \left(1 + \frac{1}{P^{ks}} + \frac{1}{P^{2ks}} + \cdots\right) \times \left(1 - \frac{1}{p^{ks}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{q^{ks}}\right) \\ &= \zeta(ks) \left(1 - \frac{1}{p^{ks}}\right) \left(1 - \frac{1}{q^{ks}}\right), \end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数, $\prod_{P}$ 表示对所有素数求乘积.

在Perron 公式中取$s_0 = 0$, $b = \frac{1}{k} + \frac{1}{\log x}$, $T = x^{\frac{1}{2k}}$, $H(x) = x$ 以及$B(\sigma) = \frac{1}{\sigma - \frac{1}{k}}$, 可得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,pq)=1}} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta(ks) \frac{(p^{ks}-1)(q^{ks}-1)}{(pq)^{ks}} \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

为了估计主项, 把积分线从$b=\frac{1}{k}+\frac{1}{\log x}$ 移到$a=\frac{1}{2k}+\frac{1}{\log x}$. 从而有

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{b+iT}+\int_{b+iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{b-iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$
$$=\mathrm{Res}\left[f(s)\frac{x^s}{s},\frac{1}{k}\right].$$

注意到

$$\lim_{s\to 1}\zeta(s)(s-1)=1,$$

可得

$$\mathrm{Res}\left[f(s)\frac{x^s}{s},\frac{1}{k}\right]=x^{\frac{1}{k}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

再由估计式

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b+iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{b-iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll x^{\frac{1}{2k}+\epsilon},$$

易证

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,pq)=1}}a(n)=x^{\frac{1}{k}}\frac{(p-1)(q-1)}{pq}+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right).$$

这就证明了引理5.2.1. □

现在证明定理. 由$e_{pq}(n)$ 的定义以及引理5.2.1 有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\n\in A}}e_{pq}(n)&=\sum_{\substack{\alpha\le\log_{pq}x\\k|\alpha}}\alpha\sum_{\substack{n\le\frac{x}{(pq)^\alpha}\\(n,pq)=1}}a(n)\\
&=\sum_{\alpha\le\frac{\log_{pq}x}{k}}k\alpha\left(\left(\frac{x}{(pq)^{k\alpha}}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{(p-1)(q-1)}{pq}+O\left(\left(\frac{x}{(pq)^{k\alpha}}\right)^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right)\right)\\
&=kx^{\frac{1}{k}}\frac{(p-1)(q-1)}{pq}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(pq)^n}-\sum_{\alpha>\frac{\log_{pq}x}{k}}\frac{\alpha}{(pq)^\alpha}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right)\\
&=kx^{\frac{1}{k}}\frac{(p-1)(q-1)}{pq}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(pq)^n}-\frac{1}{(pq)^{\left[\frac{\log_{pq}x}{k}\right]}}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\alpha+\left[\frac{\log_{pq}x}{k}\right]}{(pq)^\alpha}\right)\\
&\quad+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right)\\
&=kx^{\frac{1}{k}}\frac{(p-1)(q-1)}{pq}\left(a_{p,q}+O\left(x^{-\frac{1}{k}}\log x\right)\right)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right)\\
&=\frac{(p-1)(q-1)}{pq}a_{p,q}kx^{\frac{1}{k}}+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$a_{p,q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(pq)^n}$$

是可计算的常数.

这就证明了定理5.2.1.

§5.3 函数$e_p(n)$ 与n 的k 次剩余部分

对任意正整数n, 设$n=u^kv$, 其中v 是无k 次因子数. 设函数$b_k(n)=v$, 即$b_k(n)$ 表示n 的k 次剩余部分. 本节研究$e_p(b_k(n))$ 的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理5.3.1. 设p 为素数, k 为正整数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}e_p(b_k(n))=\left(\frac{p^k-p}{(p^k-1)(p-1)}-\frac{k-1}{p^k-1}\right)x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ 是任意正实数.

在定理中取$k=2$, 可得下面的推论.

推论5.3.1. 对任意实数$x\geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x}e_p(b_2(n))=\frac{1}{p+1}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(b_k(n))}{n^s}.$$

设正整数$n=p^{\alpha}n_1$, 其中$(n_1,p)=1$. 则由$e_p(n)$ 与$b_k(n)$ 的定义, 有

$$e_p(b_k(n))=e_p(b_k(p^{\alpha}n_1))=e_p(b_k(p^{\alpha})).$$

再由Euler 乘积公式可得

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(b_k(n))}{n^s}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\substack{n_1=1\\(n_1,p)=1}}^{\infty}\frac{e_p(b_k(p^{\alpha}))}{p^{\alpha s}n_1^s}\\ &= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e_p(b_k(p^{\alpha}))}{p^{\alpha s}}. \end{aligned}$$

易证

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e_p(b_k(p^\alpha))}{p^{\alpha s}}\\
&= \frac{1}{p^s}+\frac{2}{p^{2s}}+\cdots+\frac{k-1}{p^{(k-1)s}}+\frac{1}{p^{(k+1)s}}+\frac{2}{p^{(k+2)s}}+\cdots+\frac{k-1}{p^{(2k-1)s}}\\
&\quad +\cdots+\frac{1}{p^{(uk+1)s}}+\frac{2}{p^{(uk+2)s}}+\cdots+\frac{k-1}{p^{(uk+k-1)s}}+\cdots\\
&= \sum_{u=0}^{\infty}\frac{1}{p^{uks}}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r}{p^{rs}}\\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{p^{ks}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}}{p^s-1}-\frac{k-1}{p^{ks}}\right).
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(b_k(n))}{n^s}\\
&= \left(\frac{p^{ks}-p^s}{(p^{ks}-1)(p^s-1)}-\frac{k-1}{p^{ks}-1}\right)\zeta(s).
\end{aligned}$$

由于$\zeta(s)$ 在$s=1$ 有一个简单极点, 留数为1, 则函数

$$f(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个简单极点, 留数为

$$\left(\frac{p^k-p}{(p^k-1)(p-1)}-\frac{k-1}{p^k-1}\right)x.$$

在Perron 公式中取$s_0=0$, $b=\frac{3}{2}$, $T>1$, 可得

$$\sum_{n\le x}e_p(b_k(n))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{T}\right).$$

把积分线移到Re $s=\frac{1}{2}+\epsilon$, 并取$T=x$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}e_p(b_k(n)) &= \left(\frac{p^k-p}{(p^k-1)(p-1)}-\frac{k-1}{p^k-1}\right)x\\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\epsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{p^k-p}{(p^k-1)(p-1)}-\frac{k-1}{p^k-1}\right)x \\
&\quad +O\left(\int_{-T}^{T}\left|f\left(\frac{1}{2}+\epsilon+it\right)\right|\frac{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{1+|t|}\mathrm{d}t\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \\
&= \left(\frac{p^k-p}{(p^k-1)(p-1)}-\frac{k-1}{p^k-1}\right)x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

这就证明了定理5.3.1.

§5.4 函数$e_p(n)$ 与Euler 函数的混合均值

本节研究$e_p(n)$ 与Euler 函数$\phi(n)$ 的混合均值, 并给出一个渐近公式.

定理5.4.1. *设p 为素数, $\phi(n)$ 为Euler 函数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\leq x}e_p(n)\phi(n)=\frac{3p}{(p^2-1)\pi^2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

为了证明定理, 首先引入下面的两个引理.

引理5.4.1. *设p 为给定的素数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}\phi(n)=\frac{3p}{(p+1)\pi^2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

证明. 定义

$$f(s)=\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s},\qquad \mathrm{Re}\ \ s>1.$$

由Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_{q\neq p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\phi(q^m)}{q^{ms}} \\
&= \prod_{q\neq p}\left(1+\frac{q-1}{q^s}+\frac{q^2-q}{q^{2s}}+\frac{q^3-q^2}{q^{3s}}+\cdots\right) \\
&= \prod_{q\neq p}\left(1+\frac{1-\frac{1}{q}}{q^{s-1}}\left(1+\frac{1}{q^{s-1}}+\frac{1}{q^{2(s-1)}}+\cdots\right)\right) \\
&= \prod_{q\neq p}\left(1+\frac{1-\frac{1}{q}}{q^{s-1}}\frac{q^{s-1}}{q^{s-1}-1}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1},$$

其中$\zeta(s)$ 为Riemann zeta 函数. 在Perron 公式中取$s_0=0$, $T=x$ 以及$b=\frac{5}{2}$, 可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,p)=1}}\frac{\phi(n)}{n^s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{2}-iT}^{\frac{5}{2}+iT}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{T}\right).$$

注意到函数

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}$$

在$s=2$ 有一个简单极点, 留数为

$$\frac{3px^2}{(p+1)\pi^2}.$$

则有

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,p)=1}}\phi(n)=\frac{3p}{(p+1)\pi^2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

引理5.4.1 证毕. □

引理5.4.2. *设p 为素数. 则对任意实数$x\ge 1$, 有*

$$\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}=\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(x^{-1}\log x\right);$$

$$\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{(p^{\frac{1}{2}}-1)^2}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right).$$

证明. 不难得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha} &= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}-\sum_{\alpha>\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}\\
&= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}-\frac{1}{p^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]+t}{p^t}\\
&= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}+O\left(x^{-1}\left(\frac{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}{p-1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}\right)\right)\\
&= \frac{p}{(p-1)^2}+O\left(x^{-1}\log x\right),
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}} &= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}-\sum_{\alpha>\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]+t}{p^{\frac{t}{2}}}\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}{p^{\frac{1}{2}}-1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}\right)\right)\\ &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{(p^{\frac{1}{2}}-1)^2}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right).\end{aligned}$$

引理5.4.2 证毕. □

现在证明定理. 由引理5.4.1 与引理5.4.2 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x}e_p(n)\phi(n)=\sum_{p^\alpha\le x}\sum_{\substack{p^\alpha u\le x\\(u,p)=1}}\alpha\phi(p^\alpha u)=\sum_{p^\alpha\le x}\alpha\phi(p^\alpha)\sum_{\substack{u\le\frac{x}{p^\alpha}\\(u,p)=1}}\phi(u)\\ &=\frac{p-1}{p}\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\alpha p^\alpha\left(\frac{3p}{(p+1)\pi^2}\left(\frac{x}{p^\alpha}\right)^2+O\left(\left(\frac{x}{p^\alpha}\right)^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right)\right)\\ &=\frac{3(p-1)}{(p+1)\pi^2}x^2\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\\ &=\frac{3(p-1)}{(p+1)\pi^2}x^2\left(\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(x^{-1}\log x\right)\right)\\ &\quad+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\left(\frac{p^{\frac{1}{2}}}{(p^{\frac{1}{2}}-1)^2}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right)\right)\right)\\ &=\frac{3p}{(p^2-1)\pi^2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).\end{aligned}$$

这就证明了定理5.4.1.

§5.5 与$e_{pq}(n)$ 有关的数论函数及其均值

设p,q 是两个不同的素数, $e_{pq}(n)$ 表示n 中包含pq 的最大指数, 即

$$e_{pq}(n)=\max\left\{\alpha:(pq)^\alpha\mid n\right\}.$$

现在定义新函数

$$b_{pq}(n)=\sum_{t\mid n}e_{pq}\left(\frac{n}{t}\right)e_{pq}(t).$$

本节利用解析方法研究$b_{pq}(n)$ 的均值性质, 并给出一个渐近公式.

定理5.5.1. 设p,q 为两个不同的素数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} b_{pq}(n) = \frac{x\ln x}{(pq-1)^2}+\frac{1-2\gamma-pq+2pq\gamma-2pq\ln(pq)}{(pq-1)^3}x +O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ 是任意正实数, γ 是$Euler$ 常数.

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_{pq}(n)}{n^s}, \qquad g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{pq}(n)}{n^s}.$$

显然有

$$g(s)=f^2(s).$$

不难证明

$$f(s)=\frac{\zeta(s)}{(pq)^s-1} \qquad \text{以及} \qquad g(s)=\frac{\zeta^2(s)}{((pq)^s-1)^2}.$$

此外显然有

$$b_{pq}(n)\leq \log_{pq} n\leq n\ln n, \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{pq}(n)}{n^\sigma}\right|\leq\frac{1}{\sigma-2},$$

其中σ (≥ 2) 是s 的实部. 在Perron 公式中取

$$s_0=0, b=\frac{5}{2}, H(x)=x\ln x, B(\sigma)=\frac{1}{\sigma-2},$$

有

$$\sum_{n\leq x} b_{pq}(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{5/2-iT}^{5/2+iT}\zeta^2(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{3/2+\epsilon}}{T}\right),$$

其中

$$R(s)=\frac{1}{((pq)^s-1)^2}.$$

注意到函数

$$\zeta^2(s)R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个二阶极点, 留数为

$$\frac{x\ln x}{(pq-1)^2}+\frac{1-2\gamma-pq+2pq\gamma-2pq\ln(pq)}{(pq-1)^3}x,$$

其中γ 是Euler 函数. 从而可得

$$\sum_{n\le x} b_{pq}(n) = \frac{x\ln x}{(pq-1)^2}+\frac{1-2\gamma-pq+2pq\gamma-2pq\ln(pq)}{(pq-1)^3}x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

这就证明了定理5.5.1.

§5.6 函数$p^{e_q(n)}$ 的均值

设p,q 是两个素数, 本节研究均值$\sum\limits_{n\le x}p^{e_q(n)}$, 并给出一个渐近公式.

定理5.6.1. *设p,q 为素数, 满足$q\ge p$. 则对任意实数$x\ge 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\le x}p^{e_q(n)} = \begin{cases} \dfrac{q-1}{q-p}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}), & \text{如果} q>p; \\ \dfrac{p-1}{p\ln p}x\ln x+\left(\dfrac{p-1}{p\ln p}(\gamma-1)+\dfrac{p+1}{2p}\right)x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}), & \text{如果} q=p, \end{cases}$$

其中ϵ 是任意正实数, γ 是Euler 常数.

现在证明定理. 定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(n)}}{n^s}.$$

对任意正整数n, 显然$e_q(n)$ 是可加函数, 从而$p^{e_q(n)}$ 是可乘函数. 由$e_q(n)$ 的定义以及Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(n)}}{n^s}=\prod_{p_1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(p_1^m)}}{p_1^{ms}}\right) \\ &= \prod_{p_1}\left(1+\frac{p^{e_q(p_1)}}{p_1^s}+\frac{p^{e_q(p_1^2)}}{p_1^{2s}}+\cdots\right) \\ &= \left(1+\frac{p}{q^s}+\frac{p^2}{q^{2s}}+\cdots\right)\prod_{p_1\ne q}\left(1+\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_1^{2s}}+\cdots\right) \\ &= \zeta(s)\frac{q^s-1}{q^s-p}. \end{aligned}$$

在Perron 公式中取$s_0=0, b=2, T=x^{3/2}$, 可得

$$\sum_{n\le x}p^{e_q(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中

$$R(s)=\frac{q^s-1}{q^s-p},$$

此外ϵ 是任意正实数.

接下来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

把积分线从$2\pm iT$ 移到$1/2\pm iT$.

如果$q>p$, 则函数

$$\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个简单极点, 从而有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT}^{2+iT}+\int_{2+iT}^{1/2+iT}+\int_{1/2+iT}^{1/2-iT}+\int_{1/2-iT}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\&=R(1)x.\end{aligned}$$

取$T=x^{3/2}$, 可得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2+iT}^{1/2+iT}+\int_{1/2-iT}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\\&\ll\int_{1/2}^{2}\left|\zeta(\sigma+iT)R(s)\frac{x^2}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\\&\ll\frac{x^{2+\epsilon}}{T}=x^{\frac{1}{2}+\epsilon},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2+iT}^{1/2-iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|&\ll\int_{1}^{T}\left|\zeta(1/2+it)R(s)\frac{x^{1/2}}{t}\right|\mathrm{d}t\\&\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon}.\end{aligned}$$

注意到

$$R(1)=\frac{q-1}{q-p},$$

立即可得渐近公式

$$\sum_{n\le x}p^{e_q(n)}=\frac{q-1}{q-p}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),\quad q>p.$$

如果$q=p$, 则函数

$$\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个二阶极点. 设$\mathrm{Res}\left(\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\right)$ 表示其留数, 则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}\left(\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\right)=\lim_{s\to1}\left(\frac{p^s-1}{p^s-p}\zeta(s)(s-1)^2\frac{x^s}{s}\right)'\\
&=\lim_{s\to1}\left(\left(\frac{p^s-1}{p^s-p}(s-1)\frac{x^s}{s}\right)'\zeta(s)(s-1)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{p^s-1}{p^s-p}(s-1)\frac{x^s}{s}\right)(\zeta(s)(s-1))'\right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to1}\left(\frac{p^s-1}{p^s-p}(s-1)\right)'=\frac{p+1}{2p},\\
&\lim_{s\to1}\zeta(s)(s-1)=1,
\end{aligned}$$

以及

$$\lim_{s\to1}(\zeta(s)(s-1))'=\gamma,$$

从而可得

$$\mathrm{Res}\left(\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\right)=\frac{p-1}{p\ln p}x\ln x+\left(\frac{p-1}{p\ln p}(\gamma-1)+\frac{p+1}{2p}\right)x.$$

因此有

$$\sum_{n\le x}p^{e_q(n)}=\frac{p-1}{p\ln p}x\ln x+\left(\frac{p-1}{p\ln p}(\gamma-1)+\frac{p+1}{2p}\right)x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),\quad q=p.$$

这就证明了定理5.6.1.

§5.7 函数$e_q(n)$ 与立方补数函数的混合均值

对任意正整数n, n 的立方补数$b(n)$ 是指使得$nb(n)$ 为完全立方数的最小正整数. 设p,q 为两个素数. 本节研究均值$\sum_{n\le x}p^{e_q(b(n))}$, 并给出一些渐近公式.

定理5.7.1. 设p,q 为两个素数. 则对任意实数$x\ge1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}p^{e_q(b(n))}=\frac{q^2+p^2q+p}{q^2+q+1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中ϵ 是任意正实数.

由定理可得下面的推论.

推论5.7.1. 设q 为素数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x} q^{e_q(b(n))} = qx + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

现在证明定理. 设正整数$n=u^3v^2w$, 其中v,w 是无平方因子数, 且$(v,w)=1$. 则由$b(n)$ 的定义可得$b(n)=vw^2$. 易证对任意素数p 以及非负整数m, 有

$$b(p^m)=\begin{cases} 1, & \text{如果 } m=3t, \\ p^2, & \text{如果 } m=3t+1, \\ p, & \text{如果 } m=3t+2. \end{cases}$$

定义

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(b(n))}}{n^s}.$$

由于$e_q(n)$ 是可加函数, $b(n)$ 是可乘函数. 因此$p^{e_q(b(n))}$ 是可乘函数. 由$e_q(n)$ 的定义以及Euler 乘积公式可得

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{e_q(b(n))}}{n^s} = \prod_{p_1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(b(p_1^m))}}{p_1^{ms}}\right) \\ &= \prod_{p_1}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(1)}}{p_1^{3ts}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(p_1^2)}}{p_1^{(3t+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^{e_q(p_1)}}{p_1^{(3t+2)s}}\right) \\ &= \left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{q^{3ts}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p^2}{q^{(3t+1)s}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{p}{q^{(3t+2)s}}\right) \\ &\qquad \times\prod_{p_1\neq q}\left(1+\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_1^{2s}}+\cdots\right) \\ &= \frac{q^{3s}+p^2q^{2s}+pq^s}{q^{3s}-1}\prod_{p_1\neq q}\left(1+\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_1^{2s}}+\cdots\right) \\ &= \zeta(s)\left(\frac{q^{2s}+p^2q^s+p}{q^{2s}+q^s+1}\right). \end{aligned}$$

在Perron 公式中取$s_0=0, b=2, T=x^{3/2}$, 有

$$\sum_{n\leq x} p^{e_q(b(n))} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中

$$R(s)=\frac{q^{2s}+p^2q^s+p}{q^{2s}+q^s+1},$$

以及ϵ 是任意正实数.

注意到函数

$$\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个简单极点, 留数为$R(1)x$. 则有

$$\sum_{n\leq x}p^{e_q(b(n))}=\frac{q^2+p^2q+p}{q^2+q+1}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

这就证明了定理5.7.1.

§5.8 关于$e_p(n)$ 的混合均值

设n 为正整数, $P_d(n)$ 表示n 的所有正因数的乘积, 即

$$P_d(n)=\prod_{d|n}d.$$

例如$P_d(1)=1$, $P_d(2)=2$, $P_d(3)=3$, $P_d(4)=8$, $\cdots$. 本节研究$e_p(P_d(n))$ 的均值性质, 并给出一些渐近公式.

定理5.8.1. *设p 为素数. 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式*

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}e_p(P_d(n))=&\frac{x\ln x}{p(p-1)}\\&+\frac{(p-1)^3(2\gamma-1)-(2p^4+4p^3+p^2-2p+1)\ln p}{p(p-1)^4}x\\&+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),\end{aligned}$$

其中γ 是$Euler$ 常数, ϵ 是任意正实数.

在定理中分别取$p=2,3$, 可得下面的推论.

推论5.8.1. *对任意实数$x\geq 1$, 有*

$$\sum_{n\leq x}e_2(P_d(n))=\frac{1}{2}x\ln x+\frac{2\gamma-65\ln 2-1}{2}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon});$$

$$\sum_{n\leq x}e_2(P_d(n))=\frac{1}{6}x\ln x+\frac{8\gamma-137\ln 3-4}{24}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

为了证明定理. 首先引入下面的几个引理.

引理5.8.1. *对任意正整数n, 有*

$$P_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}},$$

其中$d(n)$ 是除数函数.

证明. 这是文献[21] 中的引理1. □

引理5.8.2. 对任意实数$x \geq 1$, 有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,m)=1}} d(n) = x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m}\frac{\ln p}{p-1}\right)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中$\prod\limits_p$ 表示对所有素数求乘积, γ 是*Euler* 函数, ϵ 是任意正实数.

证明. 设

$$T = x^{1/2}, \qquad A(s) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2.$$

由Perron 公式可得

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,m)=1}} d(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{3/2-iT}^{3/2+iT}\zeta^2(s)A(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta 函数.

注意到函数

$$\zeta^2(s)A(s)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$ 有一个二阶极点, 留数为

$$x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m}\frac{\ln p}{p-1}\right)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2.$$

从而有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,m)=1}} d(n) = x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m}\frac{\ln p}{p-1}\right)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

引理5.8.2 证毕. □

引理5.8.3. 设p 为素数. 则对任意实数$x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\alpha\leq x}\frac{\alpha}{p^\alpha} = \frac{p}{(p-1)^2} + O\left(\frac{x}{p^x}\right),$$

$$\sum_{\alpha \le x} \frac{\alpha^2}{p^\alpha} = \frac{p^2+p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{x^2}{p^x}\right),$$
$$\sum_{\alpha \le x} \frac{\alpha^3}{p^\alpha} = \frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4} + O\left(\frac{x^3}{p^x}\right).$$

证明. 第一式是显然的, 因此只证后两式. 设

$$f = \sum_{\alpha \le n} \alpha^2/p^\alpha.$$

注意到

$$\begin{aligned} f\left(1-\frac{1}{p}\right) &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha^2}{p^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha^2}{p^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{(\alpha+1)^2-\alpha^2}{p^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & f\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \\ = & \left(\frac{1}{p} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ = & \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{n^2-n^2p}{p^{n+2}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}} - \sum_{\alpha=2}^{n} \frac{2\alpha-1}{p^{\alpha+1}} \\ = & \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{n^2-n^2p}{p^{n+2}} + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \frac{2}{p^{\alpha+1}} + \frac{n^2-n^2p-(2n-1)p}{p^{n+2}} \\ = & \frac{1}{p} + \frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n+1}-p^n} + \frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^{n+2}}. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{1}{p} + \frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n+1}-p^n} + \frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^{n+2}}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2} \\ &= \frac{p}{(p-1)^2} + \frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n-2}(p-1)^3} + \frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^n(p-1)^2}. \end{aligned}$$

因此可得

$$\sum_{\alpha \le x} \frac{\alpha^2}{p^\alpha} = \frac{p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{x^2}{p^x}\right)$$

$$= \frac{p^2+p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{x^2}{p^x}\right).$$

另一方面, 定义

$$g = \sum_{\alpha\le n} \alpha^3/p^\alpha.$$

注意到

$$\begin{aligned}
& g\left(1-\frac{1}{p}\right) \\
= & \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha^3}{p^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha^3}{p^{\alpha+1}} \\
= & \frac{1}{p} - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{(\alpha+1)^3-\alpha^3}{p^{\alpha+1}} \\
= & \frac{1}{p} - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=2}^{n} \frac{3\alpha^2-3\alpha+1}{p^{\alpha+1}} \\
= & \frac{1}{p} - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \frac{p^{n-1}-1}{p^{n+1}-p^n} - \left(\frac{2}{p^2} - \frac{n}{p^{n+1}} + \frac{p^{n-2}-1}{p^{n+1}-p^n}\right)\frac{3}{1-\frac{1}{p}} \\
& + \left(\frac{4}{p^2} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \left(\frac{5}{p^3} - \frac{2n-1}{p^{n+1}} + \frac{2(p^{n-3}-1)}{p^{n+1}-p^n}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\frac{3}{1-\frac{1}{p}} \\
= & \frac{p^2+4p+10}{p(p-1)^2} + \frac{3n-3n^2+p^{n-1}-1+(3-6n)p}{p^n(p-1)} \\
& - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \frac{6p(p^{n-3}-1)-3(p^{n-2}-1)(p-1)}{p^{n-1}(p-1)^3}.
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\le x} \frac{\alpha^3}{p^\alpha} &= \left(\frac{p^2+4p+10}{p(p-1)^2} + \frac{1}{p(p-1)} + \frac{9-3p}{p(p-1)^3}\right)\frac{p}{p-1} + O\left(\frac{x^3}{p^x}\right) \\
&= \frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4} + O\left(\frac{x^3}{p^x}\right)
\end{aligned}$$

引理5.8.3 证毕. □

现在证明定理. 由$P_d(n)$ 与$e_p(n)$ 的定义, 以及前面的3 个引理可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\le x} e_p(P_d(n)) \\
= & \sum_{\substack{p^\alpha l\le x \\ (p,l)=1}} \frac{(\alpha+1)\alpha}{2} d(l) = \sum_{p^\alpha\le x} \frac{(\alpha+1)\alpha}{2} \sum_{\substack{l\le x/p^\alpha \\ (p,l)=1}} d(l)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \le \ln x/\ln p} \frac{(\alpha+1)\alpha}{2} \left(\frac{x}{p^\alpha} \left(\ln \frac{x}{p^\alpha} + 2\gamma - 1 + \frac{2\ln p}{p-1} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \right) \\
&\quad + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \\
&= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(\ln x + 2\gamma - 1 + \frac{2\ln p}{p-1} \right) \sum_{\alpha \le \ln x/\ln p} \frac{(\alpha+1)\alpha}{p^\alpha} \\
&\quad - \frac{x\ln p}{2} \sum_{\alpha \le \ln x/\ln p} \frac{(\alpha+1)\alpha^2}{p^\alpha} + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \\
&= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(\ln x + 2\gamma - 1 + \frac{2\ln p}{p-1} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{p^2+p}{(p-1)^3} + \frac{p}{(p-1)^2} + O\left(\frac{\ln^2 x}{x} \right) \right) \\
&\quad - \frac{x\ln p}{2} \left(\frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4} + \frac{p^2+p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{\ln^3 x}{x} \right) \right) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \\
&= \frac{x\ln x}{p(p-1)} + \frac{(p-1)^3(2\gamma-1) - (2p^4+4p^3+p^2-2p+1)\ln p}{p(p-1)^4} x \\
&\quad + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).
\end{aligned}
$$

这就证明了定理5.8.1.

参考文献

[1] T. M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

[2] J. Du. A number theoretic function and its mean value. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 115-117.

[3] X. Du. On the integer part of the M-th root and the largest m-th power not exceeding N. *Scientia Magna,* 2006, 2(4): 91-94.

[4] J. Gao. On the 49-th Smarandache's problem. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 203-204.

[5] J. Gao. On the additive analogues of the simple function. *Scientia Magna,* 2006, 2(3): 88-91.

[6] N. Gao. A number theoretic function and its mean value. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 49-52.

[7] N. Gao. A hybrid number theoretic function and its mean value. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 107-109.

[8] N. Gao. On the 83-th problem of F. Smarandache. *Scientia Magna,* 2005, 1(1): 83-87.

[9] N. Gao. On the second class pseudo-multiples of 5 sequences. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 83-86.

[10] L. Gegenbauer. Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. *Denkschriften Akad. Wiss. Wien,* 1885, 49: 37-80.

[11] J. Guo and Y. He. Several asymptotic formulae on a new arithmetical function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 115-118.

[12] X. He and J. Guo. On the 80-th problem of F. Smarandache. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 74-79.

[13] X. He and J. Guo. Some asymptotic properties involving the Smarandache ceil function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 133-137.

[14] Heath-Brown. Hybrid bounds for Dirichlet L-functions. II. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series,* 1980, 31: 157-167.

[15] W. Huang. An arithmetical function and the k-th power complements. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 123-126.

[16] Y. Ji. On the triangle number part residue of a positive integer. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 127-129.

[17] C. Li and C. Yang. On the additive hexagon numbers complements. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 71-74.

[18] H. Liu. 关于F. Smarandache 简单函数的均值. 商丘师范学院学报，2011, 27(3): 24-25.

[19] H. Liu and J. Gao. Mean value on the pseudo-Smarandache squarefree function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 9-11.

[20] H. Liu and Y. Lou. A note on the 29-th Smarandache's problem. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 156-158.

[21] H. Liu and W. Zhang. On the divisor products and proper divisor products sequences. *Smarandache Notions Journal,* 2002, 13: 128-133.

[22] H. Liu and W. Zhang. On the squarefree and squarefull integers. *Journal of Mathematics of Kyoto University,* 2005, 45: 247-255.

[23] Y. Liu. On the Smarandache pseudo number sequence. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics,* 2006, 21(4): 581-584.

[24] Y. Liu and P. Gao. Mean value of a new arithmetic function. *Scientia Magna,* 2005, 1(1): 187-189.

[25] Y. Lou. An asymptotic formula involving square complement numbers. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 227-229.

[26] Y. Lou. A class of Dirichlet series and its identities. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 87-89.

[27] Y. Lu. On a dual function of the Smarandache ceil function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 55-57.

[28] C. Lv. On the mean value of an arithmetical function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 89-92.

[29] Y. Ma and T. Zhang. On the m-power residues numbers sequence. *Scientia Magna,* 2005, 1(1): 53-56.

[30] Yoichi Motohashi. A Note on the Mean Value of the Zeta and L-functions. II. *Japan Academy. Proceedings. Series A. Mathematical Sciences,* 1985, 61: 313-316.

[31] 潘承洞,潘承彪. 初等数论. 北京: 北京大学出版社, 1992.

[32] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1999.

[33] O. V. Popov. On quadratic and nonresidues in the sequence of squarefree numbers (Russian). *Vestn. Mosk. Univ.,* 1989, Ser.I: 81-83.

[34] D. Ren. On the Smarandache ceil function and the Dirichlet divisor function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 51-54.

[35] G. Ren. A number theoretic function and its mean value. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 19-21.

[36] H. N. Shapiro. Introduction to the theory of numbers. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1983.

[37] F. Smarandache. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[38] Juping Wang. On Golomb's Conjecture. *Science in China, Series A,* 1987, 9: 927.

[39] X. Wang. On the Smarandache pseudo-multiples of 5 sequence. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 17-19.

[40] Z. Xu. On the k-full number sequences. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 159-163.

[41] Z. Xu. On the additive k-th power complements. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 13-16.

[42] Z. Xu. Some arithmetical properties of primitive numbers of power p. *Scientia Magna,* 2006, 2(1): 9-12.

[43] X. Xue. On the mean value of the Dirichlet divisor function in some special sets. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 13-17.

[44] Q. Yang and M. Yang. An arithmetical function and the perfect k-th power numbers. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 91-94.

[45] W. Yao. On the k-power complement sequence. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 43-46.

[46] W. Yao. The additive analogue of Smarandache function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 99-102.

[47] W. Yao. On the generalization of the floor of the square root sequence. *Scientia Magna,* 2005, 1(1): 183-186.

[48] Y. Yi. An equation involving Euler's function. *Research on Smarandache Problems in Number Theory II,* 2005: 5-7.

[49] Y. Yi and F. Liang. On the asymptotic property of divisor function for additive complements. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 65-68.

[50] P. Zhang. Some identities on k-power complement. *Scientia Magna,* 2006, 2(2): 60-63.

[51] T. Zhang. On the cubic residues numbers and k-power complement numbers. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 147-152.

[52] T. Zhang. An arithmetic function and the divisor product sequences. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 21-26.

[53] W. Zhang. Identities on the k-power complements. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 61-64.

[54] X. Zhang and Y. Lou. The Smarandache irrational root sieve sequences. *Research on Smarandache Problems in Number Theory,* 2004: 27-31.

[55] X. Zhao and Z. Ren. On m-th power free part of an integer. *Scientia Magna,* 2005, 1(1): 39-41.

[56] J. Zheng. On the inferior and superior k-th power part of a positive integer and divisor function. *Smarandache Notions Journal,* 2004, 14: 88-91.

[57] H. Zhou. An infinite series involving the Smarandache power function $SP(n)$. *Scientia Magna*, 2006, 2(3): 109-112.

[58] W. Zhu. On the cube free number sequences. *Smarandache Notions Journal*, 2004, 14: 199-202.

Research on Some Smarandache Problems Vol. 7

Huaning LIU
Department of Mathematics
Northwest University
Xi'an, Shaanxi
P. R. China

Jing GAO
School of Science
Xi'an Jiaotong University
Xi'an, Shaanxi
P. R. China

The Educational Publisher

2011

责任编辑：王婷婷
封面设计：刘燕妮

本书对目前利用解析方法研究 Smarandache问题的相关工作进行了系统的总结， 主要包括解析数论的基础知识、Smarandache 数列的均值、一些 Smarandache函数的无穷级数、除数函数与一些 Smarandache 函数的混合均值，等等. 有兴趣的读者通过阅读本书，可以开拓读者的视野，激发读者对这些领域的研究兴趣.

This book systematically introduces the works obtained by using analytic methods on Smarandache problems. The book includes the basic knowledge of analytic number theory, mean value on some Smarandache sequences, infinite series involving some Smarandache functions, hybrid mean value of divisor function and some Smarandache functions, and so on. This book could open up the reader’s perspective, and inspire the reader to these fields.

